Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 7 syksy 2024

1. (**e**) Esitehtävä: Vastaukset Moodlessa

2. (**e**) Esitehtävä: Vastaukset Moodlessa

3. (**p**) Tarkastellaan LTI-systeemiä, joka on määritelty integraaliyhtälöllä

$$Y(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} X(\tau)\, d\tau.$$

Olkoon heräte $X(t)$ stationaarista valkoista kohinaa, jonka tehotiheys on $S_X(f) = \frac{N_0}{2}$. Määrää

a) herätteen ja vasteen ristitehotiheysspektri $S_{XY}(f)$
b) herätteen ja vasteen ristikorrelaatiofunktio $R_{XY}(\tau)$
c) vasteen tehotiheysspektri $S_Y(f)$
d) vasteen autokorrelaatiofunktio $R_Y(\tau)$.

Opastus: kirjoita integraali konvoluutiona selvittääksesi impulssivasteen ja siirtofunktion.

Ratkaisu Huomataan, että

$$Y(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} X(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) X(\tau)\, d\tau = e^{-t}u(t) * X(t),$$

joten impulssivaste on $h(t) = e^{-t}u(t)$. Silloin kaavalla B3 saadaan $H(f) = \dfrac{1}{1 + i2\pi f}$ ja

a) $S_{XY}(f) = H(f)S_X(f) = \dfrac{1}{1 + i2\pi f}\dfrac{N_0}{2}$ (kaava J30)
b) $R_{XY}(\tau) = \dfrac{N_0}{2} e^{-\tau} u(\tau)$ (kaava B3)
c) $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = \dfrac{1}{1 + 4\pi^2 f^2}\dfrac{N_0}{2}$ (kaava J28)
d) $R_Y(\tau) = \dfrac{N_0}{4} e^{-|\tau|}$ (kaavalla B4).

4.(**p**) Linear Predictive Coding (LPC) on puheenkoodauksessa käytettävä menetelmä, missä puhesignaalin $X(t)$ näytettä $X[n] = X(t_n)$ ennustetaan aiempien näytteiden lineaarikombinaationa

$$X[n] = a[1]X[n-1] + a[2]X[n-2] + \ldots + a[p]X[n-p] + E[n],$$

missä $E[n]$ on mallin virhe. Tätä voidaan toisaalta pitää rekursiivisena suodattimena, missä $E[n]$ on heräte ja $X[n]$ vaste. Kertoimet $a[n]$ valitaan siten, että siirtofunktion napoja vastaavat kulmataajuudet kuvaavat mahdollisimman hyvin koodattavan puhesignaalin resonanssitaajuuksia (ns. formantteja). Voidaan osoittaa, että optimaalisen suodattimen kertoimet saadaan ratkaistua yhtälöryhmästä

$$R_X[m] = \sum_{k=1}^{p} a[k]R_X[m-k], \quad \text{kun } m = 1, 2, \ldots, p.$$

Olkoon tässä $p = 2$. Määrää optimaalisen suodattimen kertoimet, kun signaalin $X[n]$ autokorrelaatiofunktio on $R_X[m] = \cos(\frac{\pi}{4}m)$. (Ohje: sijoita annettuun kaavaan $m = 1$ ja $m = 2$ ja ratkaise yhtälöpari.) Määrää saadun suodattimen siirtofunktio ja navat. Mitä resonanssitaajuuksia navat vastaavat?

Ratkaisu Sijoitetaan $m = 1, 2$

$$\begin{aligned} R_X[1] &= a[1]R_X[0] + a[2]R_X[-1] \\ R_X[2] &= a[1]R_X[1] + a[2]R_X[0] \end{aligned}$$

Kun $R_X[m] = \cos(\frac{\pi}{4}m)$, saadaan

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{4}) & = a[1]\cos(0) + a[2]\cos(-\frac{\pi}{4}) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) & = a[1]\cos(\frac{\pi}{4}) + a[2]\cos(0) \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & = a[1]\cdot 1 + a[2]\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & = a[1]\frac{1}{\sqrt{2}} + a[2]\cdot 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a[1] & = \sqrt{2} \\ a[2] & = -1. \end{cases}$$

Siirtofunktio: nyt siis systeemin määrittelee differenssiyhtälö $x[n] = \sqrt{2}x[n-1] + x[n-2] + e[n]$. $\mathcal{Z}$-muuntamalla saadaan

$$\begin{aligned} X(z) &= \sqrt{2}X(z)z^{-1} - X(z)z^{-2} + E(z) \\ \Leftrightarrow\ (1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2})X(z) &= E(z) \\ \Leftrightarrow\ X(z) &= \frac{1}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}E(z). \end{aligned}$$

Siirtofunktio on $H(z) = \frac{1}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-1}} = \frac{z^2}{z^2-\sqrt{2}z+1}$. Navat:

$$z_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\arg z_{1,2} = \arg(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pm\frac{\pi}{4}$, joten navat vastaavat kulmataajuutta $\omega = \frac{\pi}{4}$, mikä olikin alkuperäisen signaalin kulmataajuus autokorrelaatiofunktion perusteella.

5. (**n**) a) Määrää sellainen kausaalinen LTI-systeemi, jolla voidaan generoida satunnaissignaali $Y(t)$, jonka tehotiheysspektri on

$$S_Y(f) = \frac{8}{100 + 4\pi^2 f^2}$$

käyttämällä herätteenä valkoista kohinaa, jonka tehotiheys on 2. Määrää systeemin taajuusvastefunktio $H(f)$ ja impulssivaste $h(t)$.

b) Määrää sellainen kausaalinen LTI-systeemi, jonka vaste on valkoista kohinaa tehotiheydellä 1, kun herätteen $X(t)$ tehotiheysspektri on

$$S_X(f) = 1 + \frac{11}{25 + 4\pi^2 f^2}.$$

Anna systeemin taajuusvastefunktio $H(f)$ ja impulssivaste $h(t)$. Ohje: kirjoita aluksi herätteen tehotiheysspektri muodossa $S_X(f) = G(f)\overline{G(f)}$, missä $1/G(f)$ on kausaalisen systeemin taajuusvastefunktio.

Ratkaisu

a) Vasteen tehotiheysspektri (kaava J28)

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = H(f)\overline{H}(f) S_X(f)$$

sijoitetaan $S_Y(f)$ ja $S_X(f)$

$$\frac{8}{100 + 4\pi^2 f^2} = H(f)\overline{H}(f) \cdot 2 \quad \Big| : 2$$

spektraalifaktoroidaan

$$\Leftrightarrow \; H(f)\overline{H}(f) = \underbrace{\frac{2}{10 + i2\pi f}}_{\text{kaus.}} \cdot \underbrace{\frac{2}{10 - i2\pi f}}_{\text{ei-kaus.}}.$$

Systeemin taajuusvastefunktio

$$H(f) = \frac{2}{10 + i2\pi f}.$$

Impulssivaste on taajuusvastefunktion Fourier-käänteismuunnos (kaava B3)

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{10 + i2\pi f}\right) = 2e^{-10t}u(t).$$

b) Vasteen tehotiheys on $S_Y(f) = 1$, kun herätteen tehotiheys on

$$S_X(f) = 1 + \frac{11}{25 + 4\pi^2 f^2} = \frac{36 + 4\pi^2 f^2}{25 + 4\pi^2 f^2}.$$

Kaavasta J28 saadaan

$$|H(f)|^2 = H(f)\overline{H(f)} = \frac{S_Y(f)}{S_X(f)} = \frac{25 + 4\pi^2 f^2}{36 + 4\pi^2 f^2} = \underbrace{\frac{5 + i2\pi f}{6 + i2\pi f}}_{\text{kaus.}} \cdot \underbrace{\frac{5 - i2\pi f}{6 - i2\pi f}}_{\text{ei kaus.}}$$

Siis $H(f) = \frac{5+i2\pi f}{6+i2\pi f} = 1 - \frac{1}{6+i2\pi f}$, joten impulssivaste on $h(t) = \delta(t) - \mathrm{e}^{-6t}u(t)$.

6. (**n**) Signaalia $X[n]$ sanotaan ARMA(p,q)-signaaliksi (autoregressive moving average), jos se on differenssiyhtälöllä

$$X[n] + a_1 X[n-1] + \ldots + a_q X[n-q] = b_0 W[n] + b_1 W[n-1] + \ldots + b_p W[n-p]$$

määritellyn systeemin vaste valkoiseen kohinaan $W[n]$, jonka varianssi on σ^2.

Olkoon $X[n]$ ARMA(1,1)-signaali ja $b_0 = 0$, $b_1 = \frac{1}{2}$ ja $a_1 = -\frac{1}{2}$. Määrää kyseisen systeemin siirtofunktio $H(z)$ ja taajuusvastefunktio $H(\omega)$. Määrää signaalin $X[n]$ tehotiheysspektri ja autokorrelaatiofunktio. Millä kulmataajuuksilla tehoa on eniten?

Ratkaisu $\mathcal{Z}$-muuntamalla yhtälö

$$X[n] - \frac{1}{2}X[n-1] = \frac{1}{2}W[n-1]$$

saadaan

$$\begin{aligned}(1 - \frac{1}{2}z^{-1})X(z) &= \frac{1}{2}W(z)z^{-1}\\ X(z) &= \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}W(z),\end{aligned}$$

joten siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

ja taajuusvastefunktio

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{2}e^{-i\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega}}.$$

Vasteen tehotiheysspektri kaavalla J28

$$\begin{aligned}S_X(\omega) &= \overline{H(\omega)}H(\omega)S_W(\omega)\\ &= \frac{\frac{1}{2}e^{i\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{i\omega}} \frac{\frac{1}{2}e^{-i\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega}}\sigma^2\\ &= \frac{\sigma^2}{4}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{i\omega} - \frac{1}{2}e^{-i\omega} + \frac{1}{4}}\\ &= \frac{\sigma^2}{4}\frac{1}{1 - \cos\omega + \frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

Vasteen autokorrelaatiofunktiota varten kirjoitetaan ensin

$$S_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{3}\frac{1 - (\frac{1}{2})^2}{1 - 2\cdot\frac{1}{2}\cos\omega + (\frac{1}{2})^2}$$

josta kaavalla I5

$$R_X[k] = \frac{\sigma^2}{3}(\frac{1}{2})^{|k|}.$$

Tehotiheysspektrin maksimi on kulmataajuudella $\omega = 0$:

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{4}\frac{1}{\frac{5}{4} - \cos\omega} \leq \frac{\sigma^2}{4}\frac{1}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{\sigma^2}{4}\frac{1}{\frac{5}{4} + \cos 0},$$

joten matalia taajuuksia on eniten.