Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 6 syksy 2024

1. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

2. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

3. (**p**) Olkoon $Y(t) = (1 + X(t))\cos(2\pi t + \Theta)$, missä $\Theta \sim \mathrm{U}(0, 2\pi)$. $X(t)$ on Θ:sta riippumaton satunnaissignaali, jonka odotusarvofunktio on $E[X(t)] = 0$ ja autokorrelaatiofunktio on $R_X(\tau) = \mathrm{tri}(\tau)$. Laske $Y(t)$:n odotusarvofunktio, autokorrelaatiofunktio ja määrää $Y(t)$:n keskimääräinen teho. Onko $Y(t)$ stationaarinen?

   <u>Ratkaisu</u>

   $Y(t)$:n odotusarvofunktio

$$
\begin{aligned}
E[Y(t)] &= E[(1 + X(t))\cos(2\pi t + \Theta)] \\
&\quad (X(t) \text{ on } \Theta\text{:sta riippumaton}) \\
&= (1 + E[X(t)])E[\cos(2\pi t + \Theta)] \\
&= 1 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(2\pi t + \theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \Big/_{0}^{2\pi} \sin(2\pi t + \theta) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\sin(2\pi t + 2\pi) - \sin(2\pi t)\Big] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

   $Y(t)$:n autokorrelaatiofunktio

$$
\begin{aligned}
R_Y(t, t+\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= E[(1 + X(t))\cos(2\pi t + \Theta)(1 + X(t+\tau))\cos(2\pi t + 2\pi\tau + \Theta)] \\
&\quad (X(t) \text{ on } \Theta\text{:sta riippumaton, } \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))) \\
&= \frac{1}{2}E[(1 + X(t))(1 + X(t+\tau))]E[\cos(2\pi\tau) + \cos(4\pi t + 2\pi\tau + 2\Theta)] \\
&= \frac{1}{2}(1 + R_X(\tau))\left[\cos(2\pi\tau) + \int_0^{2\pi} \cos(4\pi t + 2\pi\tau + 2\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}(1 + \mathrm{tri}(\tau))\Big[\cos(2\pi\tau) + \frac{1}{4\pi}\Big/_{0}^{2\pi} \sin(4\pi t + 2\pi\tau + 2\theta)\Big] \\
&\quad (\text{integrointi yli kahden jakson} = 0) \\
&= \frac{1}{2}(1 + \mathrm{tri}(\tau))\cos(2\pi\tau)
\end{aligned}
$$

Keskimääräinen teho $P_Y = E[Y^2(t)] = R_Y(0) = 1$.

$Y(t)$ on stationaarinen, koska $E[Y(t)]$ ja $R_Y(t, t+\tau)$ ovat ajasta t riippumattomia.

4.a (**p**) Olkoon $W(t)$ Wiener-prosessi luentojen esimerkeissä 5.4 ja 5.7 ja $X(t) = W(t) - tW(1)$, kun $t \geq 0$. Määrää signaalin $X(t)$ autokorrelaatiofunktio $R_X(t_1, t_2)$ kun $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$.

Ratkaisu. Luentoesimerkin 5.4 mukaan $W(t)$ noudattaa ehtoja

(i) $P(W(0) = 0) = 1$,

(ii) $W(t) - W(s) \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2(t-s)),\ s \leq t$,

(iii) $W(t_2) - W(t_1), \quad W(t_3) - W(t_2), \ldots, \quad W(t_n) - W(t_{n-1})$ ovat riippumattomia aina kun $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

Luentoesimerkin 5.7 mukaan $\mu_W(t) = 0$, $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2 \min(t_1, t_2)$. Nyt

$$
\begin{aligned}
R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[(W(t_1) - t_1 W(1))(W(t_2) - t_2 W(1))] \\
&= E[W(t_1)W(t_2)] - t_2 E[W(t_1)W(1)] - t_1 E[W(t_2)W(1)] + t_1 t_2 E[W^2(1)] \\
&= R_W(t_1, t_2) - t_2 R_W(t_1, 1) - t_1 R_W(t_2, 1) + t_1 t_2 R_W(1, 1) \\
&\overset{t_1 \leq t_2 \leq 1}{=} \sigma^2 t_1 - t_2 \sigma^2 t_1 - t_1 \sigma^2 t_2 + t_1 t_2 \sigma^2 \\
&= \sigma^2 t_1 (1 - t_2).
\end{aligned}
$$

4.b (**p**) Aikadiskreetin satunnaissignaalin $X[n]$ odotusarvofunktio on $\mu_X[n] = \mu$ ja autokorrelaatiofunktio on $R_X[n, n+m] = R[m]$. Muodostetaan uusi signaali $Y[n] = X[n-1] + c$, missä c on vakio.

a) Tutki onko $Y[n]$ stationaarinen laskemalla sen odotusarvofunktio ja autokorrelaatiofunktio $R_Y[n, n+m]$.

b) Ovatko $X[n]$ ja $Y[n]$ yhteisstationaariset?

Ratkaisu

a) Odotusarvofunktio

$$
\mu_Y[n] = E[Y[n]] = E[X[n-1] + c] = E[X[n-1]] + c = \mu + c
$$

Autokorrelaatiofunktio

$$
\begin{aligned}
R_Y[n, n+m] &= E[Y[n]Y[n+m]] = E[(X[n-1] + c)(X[n+m-1] + c)] \\
&= E[X[n-1]X[n+m-1]] + cE[X[n-1]] + cE[X[n+m-1]] + c^2
\end{aligned}
$$

($X[n]$ on stationaarinen)

$$
= R[m] + 2c\mu + c^2
$$

Odotusarvofunktio ja autokorrelaatiofunktio eivät riipu ajasta n, joten signaali on stationaarinen.

b) Ristikorrelaatiofunktio

$$\begin{aligned} R_{XY}[n,n+m] &= E[X[n]Y[n+m]] = E[X[n](X[n+m-1]+c)] \\ &= E[X[n]X[n+m-1]] + cE[X[n]] \\ &= R_X[m-1] + c\mu \end{aligned}$$

$X[n]$ ja $Y[n]$ ovat stationaariset eikä ristikorrelaatio $R_{XY}[n, n+m]$ riipu ajasta n, joten signaalit ovat yhteisstationaariset.

5. (**n**) Olkoon $A(t)$ ja $B(t)$ riippumattomia, nollaodotusarvoisia stationaarisia satunnaissignaaleja, joilla on sama autokorrelaatiofunktio $R_A(\tau) = R_B(\tau) = e^{-|\tau|}$.

a) Tutki ovatko signaalit $X(t) = A(t)\sin t$ ja $Y(t) = B(t)\cos t$ stationaarisia.

b) Laske ristikorrelaatiofunktio $R_{XY}(t, t+\tau)$. Ovatko $X(t)$ ja $Y(t)$ yhteisstationaariset?

c) Tutki onko signaali $Z(t) = X(t) + Y(t)$ stationaarinen.

Ratkaisu

a)

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[A(t)\sin t] = E[A(t)]\sin t = 0 \\ R_X(t,t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E[A(t)\sin t A(t+\tau)\sin(t+\tau)] \\ &= E[A(t)A(t+\tau)]\sin t\sin(t+\tau) = e^{-|\tau|}\sin t\sin(t+\tau) \end{aligned}$$

Esim. $R_X(0,\pi) = 0 \neq R_X(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = -e^{-\pi}$, joten $X(t)$ ei ole stationaarinen. Samalla tavalla

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= 0 \\ R_Y(t,t+\tau) &= e^{-|\tau|}\cos t\cos(t+\tau) \end{aligned}$$

Esim. $R_Y(0,\pi) = -e^{-\pi} \neq R_Y(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = 0$, joten $Y(t)$ ei ole stationaarinen.

b) Koska $A(t)$ ja $B(t)$ ovat riippumattomat ja nollaodotusarvoiset,

$$\begin{aligned} R_{XY}(t,t+\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] = E[A(t)\sin t B(t+\tau)\cos(t+\tau)] \\ &= E[A(t)]E[B(t)]\sin t\cos(t+\tau) = 0. \end{aligned}$$

Nyt $R_{XY}(t, t+\tau)$ ei riipu t:stä, mutta koska $X(t)$ ja $Y(t)$ eivät ole stationaariset, ne eivät ole myöskään yhteisstationaariset.

c) $Z(t) = X(t) + Y(t)$

$$E[Z(t)] = E[X(t)+Y(t)] = E[X(t)] + E[Y(t)] = 0$$

$$\begin{aligned} R_Z(t,t+\tau) &= E[Z(t)Z(t+\tau)] = E[(X(t)+Y(t))(X(t+\tau)+Y(t+\tau))] \\ &= E[X(t)X(t+\tau) + X(t)Y(t+\tau) + X(t+\tau)Y(t) + Y(t)Y(t+\tau)] \\ &= R_X(t,t+\tau) + \underbrace{R_{XY}(t,t+\tau)}_{\overset{\text{b)}}{=}0} + \underbrace{R_{YX}(t,t+\tau)}_{=0,\text{ kuten } R_{XY}(t,t+\tau)} + R_Y(t,t+\tau) \\ &= R_X(t,t+\tau) + R_Y(t,t+\tau) \\ &= e^{-|\tau|}\sin t\sin(t+\tau) + e^{-|\tau|}\cos t\cos(t+\tau) \\ &\overset{\text{D7}}{=} e^{-|\tau|}\cos\tau \end{aligned}$$

$E[Z(t)] = 0$ ja $R_Z(t, t+\tau) = R_Z(\tau)$ eivät riipu ajasta t, joten $Z(t)$ on stationaarinen.

6. (**n**) Tarkastellaan stationaarisen aikadiskreetin satunnaissignaalin $X[n]$ aikakeskiarvoa

$$Y[n] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X[k].$$

Olkoon $X[n]$ jono riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden odotusarvo on $\mu = 0$ ja varianssi σ^2. Määrää satunnaissignaalin $Y[n]$ odotusarvo- ja autokorrelaatiofunktio sekä varianssi $D^2(Y[n])$.

Ratkaisu. Odotusarvofunktio

$$\mu_Y[n] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X[k]\right] = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} E[X[n]] = 0.$$

Autokorrelaatiofunktio kun $n_1, n_2 \geq 1$:

$$\begin{aligned}
R_Y[n_1, n_2] &= E\left[\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1} X[k] \cdot \frac{1}{n_2}\sum_{l=1}^{n_2} X[l]\right] \\
&= \frac{1}{n_1 n_2}\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2} \underbrace{E[X[k]X[l]]}_{=\begin{cases}\sigma^2, \text{ kun } l=k \\ 0, \text{ muulloin}\end{cases}} \\
&= \frac{1}{n_1 n_2}\sum_{k=1}^{\min(n_1,n_2)} \sigma^2 = \frac{\sigma^2 \min(n_1, n_2)}{n_1 n_2}
\end{aligned}$$

Varianssi

$$D^2(Y[n]) = R_Y[n, n] - \mu_Y^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$