Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 5 syksy 2024

1. (**e**) Esitehtävä: vastaukset Moodlessa
2. (**e**) Esitehtävä: vastaukset Moodlessa
3. (**p**) Kahden komponentin elinikien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-2x}, & \text{kun } x \geq 0,\ 0 \leq y \leq a, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

a) Määrää vakio a.

b) Määrää X:n ja Y:n reunajakaumien tiheysfunktiot. Ovatko muuttujat riippumattomat? Perustele vastauksesi.

c) Laske korrelaatio $E(XY)$ ja määrää kovarianssi $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

<u>Ratkaisu</u>

a) Tiheysfunktion integraali on $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$. Nyt

$$\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx \overset{\text{os. int.}}{=} \Big/_{0}^{\infty} x\cdot\frac{e^{-2x}}{-2} - \int_0^\infty 1\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx = \Big/_{0}^{\infty}\frac{e^{-2x}}{-4} = \frac{1}{4},$$

ja

$$\int_0^a \frac{1}{4}\,dy = \frac{1}{4}a = 1, \quad \Leftrightarrow \quad a = 4.$$

b)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^4 xe^{-2x}\,dy = 4xe^{-2x}, \quad x \geq 0$$

(gamma-jakauma)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx \overset{\text{ks. edellä}}{=} \frac{1}{4}, \quad 0 \leq y \leq 4$$

(tasajakauma $\mathrm{U}(0,4)$) Nyt $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, joten muuttujat ovat riippumattomat.

c) Jos satunnaismuuttujat ovat riippumattomat, $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, ne ovat myös korreloimattomat:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\,dy = E(X)E(Y).$$

Nyt

$$E(X) = \int_0^\infty 4x^2 e^{-2x}\,dx \overset{\text{os.int}}{=} 4 \Big/_0^\infty x^2 \frac{e^{-2x}}{-2} - 4\int_0^\infty 2x\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx = 4\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx \overset{\text{a)}}{=} 4\cdot\frac{1}{4} = 1,$$

ja koska $Y \sim \mathrm{U}(0,4)$, $E(Y) = 2$. Siis $E(XY) = 2$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$.

4. (**p**) Satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssimatriisi on

$$\begin{pmatrix} 4.4 & 1.2 \\ 1.2 & 2.6 \end{pmatrix}.$$

Muodosta X:stä ja Y:stä lineaarisella muunnoksella uudet muuttujat U ja V, jotka ovat korreloimattomia. Mikä on uusien muuttujien kovarianssimatriisi?

<u>Ratkaisu</u>

Muodostetaan lineaarisella muunnoksella $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ korreloimattomat satunnaismuuttujat U ja V (eli $\mathrm{Cov}(U,V) = 0$)

$$C_{(U,V)} = AC_{(X,Y)}A^T = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix}.$$

Matriisi A muodostetaan riveittäin $C_{(X,Y)}$:n ominaisvektoreista. Ominaisarvot λ saadaan yhtälöstä $\det(C_{(X,Y)} - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 4.4-\lambda & 1.2 \\ 1.2 & 2.6-\lambda \end{vmatrix} = (4.4-\lambda)(2.6-\lambda) - 1.44 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}.$$

Ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $\big(C_{(X,Y)} - \lambda I\big)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 2:}$ $\quad \begin{pmatrix} 2.4 & 1.2 \\ 1.2 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; b = -2a, \quad \text{valitaan} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 5:}$ $\quad \begin{pmatrix} -0.6 & 1.2 \\ 1.2 & -2.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; a = 2b, \quad \text{valitaan} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Lineaarisen muunnoksen matriisi

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uudet korreloimattomat muuttujat

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} X - 2Y \\ 2X + Y \end{pmatrix}.$$

Nyt: $C_{(U,V)} = AC_{(X,Y)}A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ eli $\mathrm{Cov}(U,V) = 0$. Lisäksi $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 7 = \sigma_U^2 + \sigma_V^2$.

Huomio 1. $\sigma_U^2 = \lambda_1$, $\sigma_V^2 = \lambda_2$.

Huomio 2. Jos valitaan muunnosmatriisin riveiksi normittamattomat ominaisvektorit, kokonaisvarianssi ei pysy samana. Esim. muunnosmatriisilla $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ saadaan $\sigma_U^2 + \sigma_V^2 = 35$.

5. (**n**) Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia ja noudattavat eksponenttijakaumaa Exp (1), jolloin $f_X(x) = e^{-x}u(x)$, $f_Y(y) = e^{-y}u(y)$.

a) Mikä on yhteisjakauman tiheysfunktio $f_{X,Y}(x, y)$?

b) Muodostetaan uudet satunnaismuuttujat Z ja W lineaarisella muunnoksella

$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X + Y \end{pmatrix}.$$

Määrää muuttujien Z ja W yhteisjakauman tiheysfunktio $h_{Z,W}(z, w)$.

c) Määrää integroimalla satunnaismuuttujan W reunajakauman tiheysfunktio $h_W(w)$.

d) Hoksaatko tästä, mikä on summan $W = X + Y$ tiheysfunktio yleisesti, kun X ja Y ovat riippumattomia ja niiden tiheysfunktiot ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$? Vinkki: tutki integraalia

$$h_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{Z,W}(z, w)dz$$

b)-kohdan lineaarisen muunnoksen jälkeen.

<u>Ratkaisu</u>

a) Reunajakaumien tiheysfunktiot ovat $f_X(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{u}(x)$ ja $f_Y(y) = \mathrm{e}^{-y}\mathrm{u}(y)$. Koska satunnaismuuttujat ovat riippumattomia, niin $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{u}(x)\,\mathrm{e}^{-y}\mathrm{u}(y)$.

b) Lineaarinen muunnos

$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ -Z + W \end{pmatrix},$$

ja Jacobin determinantti on $J = \frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Muuttujien Z ja W yhteisjakauman tiheysfunktio on siis

$$h_{Z,W}(z, w) = f_{X,Y}(z, -z + w)\frac{1}{|J|} = \mathrm{e}^{-z}\mathrm{u}(z)\,\mathrm{e}^{-(w-z)}\mathrm{u}(w - z) = \mathrm{e}^{-w}\mathrm{u}(z)\mathrm{u}(w - z).$$

c) Muuttujan W reunajakauma

$$h_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{Z,W}(z, w)\mathrm{d}z = \begin{cases} \int_0^w \mathrm{e}^{-w}\mathrm{d}z = w\,\mathrm{e}^{-w}, & w \geq 0 \\ 0, & w < 0 \end{cases} = w\,\mathrm{e}^{-w}\mathrm{u}(w).$$

(Gamma$(2, 1)$-jakauma)

d) Edellisen perusteella yleisesti jos X ja Y ovat riippumattomat, $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ sekä $Z = X$ ja $W = X + Y$, niin

$$h_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{Z,W}(z,w)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z,-z+w)\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z)f_Y(w-z)\,dz$$

eli $h_{X+Y} = f_X * f_Y$.

6. (**n**) Satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot ovat $\mu_X = 2$ ja $\mu_Y = -1$ sekä varianssit $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 5$. Korrelaatiokerroin on $\rho_{X,Y} = \frac{4}{5}$. Muodostetaan uudet muuttujat $U = X + 2Y$ ja $V = 2X - Y$. Määrää

a) $E(U)$ ja $E(V)$

b) Kovarianssimatriisit $C_{X,Y}$ ja $C_{U,V}$ sekä korrelaatiokerroin $\rho_{U,V}$

c) Millä lineaarisella muunnoksella olisi saatu korreloimattomat muuttujat U ja V?

<u>Ratkaisu</u>

a)

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E(U) \\ E(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Kovarianssi $\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_X \sigma_Y \rho(X,Y) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{4}{5} = 4$, joten

$$C_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Siispä

$$C_{(U,V)} = AC_{(X,Y)}A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix},$$

eli $D^2(U) = 41,\ D^2(V) = 9, \mathrm{Cov}(U,V) = 12$ sekä $\rho(U,V) = \frac{12}{\sqrt{41}\sqrt{9}} \approx 0.6247$.

c) Kovarianssimatriisin $C_{(X,Y)}$ ominaisarvot:

$$\det(C_{(X,Y)} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 1$. Ominaisvektorit:

$$\lambda_1 = 9: \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow a = b, \text{ valitaan } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1: \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow a = -b, \text{ valitaan } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kysytty muunnosmatriisi on esim.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$