Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 4 syksy 2024

1. **(e)** Esitehtävä: vastaukset Moodlessa

2. **(e)** Esitehtävä: vastaukset Moodlessa

3. **(p)** Kuvan 1 RL-piiri toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\begin{aligned} v_1(t) - Li'(t) - Ri(t) &= 0, \\ v_2(t) &= Ri(t), \end{aligned}$$

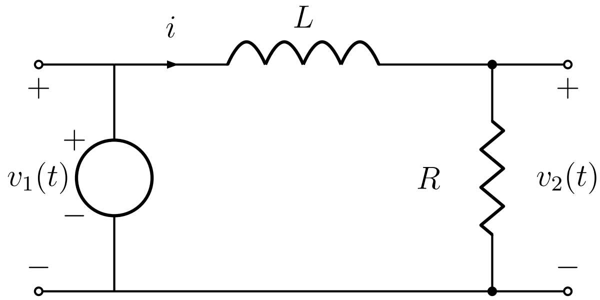
missä $v_1(t)$ ja $v_2(t)$ ovat jännitteitä ja $i(t)$ on piirissä kulkeva virta.

a) Määrää piirin taajuusvastefunktio, kun $v_1(t)$ on heräte ja $i(t)$ on vaste.

b) Määrää piirin taajuusvastefunktio ja impulssivaste, kun $v_1(t)$ on heräte ja $v_2(t)$ on vaste. Onko systeemi yli-, ali- vai kaistanpäästösuodatin?

c) Määrää b)-kohdan tapauksessa suodattimen päästökaistan leveyttä kuvaava –3 dB:n rajataajuus, s.o. taajuus f_c jolla $|H(f_c)|^2 = \frac{1}{2}$.

Kuva 1



Ratkaisu

a) Fourier-muuntamalla differentiaaliyhtälö saadaan

$$\begin{aligned} V_1(f) - i2\pi f L I(f) - RI(f) &= 0 \\ \Leftrightarrow (R + i2\pi f L)I(f) &= V_1(f) \\ I(f) &= \frac{1}{R + i2\pi f L} V_1(f) \end{aligned}$$

joten kun vaste on $i(t)$, taajuusvastefunktio on

$$H(f) = \frac{1}{R + i2\pi f L}.$$

b) Kun vasteeksi otetaan $v_2(t) = Ri(t)$, saadaan yhtälö

$$V_2(f) = RI(f) = \frac{R}{R + i2\pi f L} V_1(f)$$

ja taajuusvastefunktio on

$$H(f) = \frac{R}{R + i2\pi f L} = \frac{\frac{R}{L}}{\frac{R}{L} + i2\pi f}.$$

Koska $|H(0)| = 1$ ja $|H(f)| = \frac{R}{\sqrt{R^2+(2\pi f L)^2}} \approx 0$, kun f suuri, kyseessä on alipäästösuodatin. Impulssivaste on kaavalla B3

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)] = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t).$$

c)

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= \frac{R^2}{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2 &= 2R^2 \\ \Leftrightarrow f &= \frac{R}{2\pi L}. \end{aligned}$$

4. (**p**) Differenssiyhtälö

$$y[n] = \frac{1}{3} y[n-1] + x[n] - 3x[n-1]$$

määrittelee lineaarisen aikainvariantin systeemin, missä $x[n]$ on heräte ja $y[n]$ on vaste.

a) Määrää systeemin siirtofunktio. Piirrä systeemin nolla-napakartta: merkitse kompleksitasoon siirtofunktion $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ osoittajan nollakohdat pienellä ympyrällä $\circ$ ja nimittäjän nollakohdat pienellä rastilla $\times$. Piirrä myös yksikköympyrä. Onko systeemi stabiili?

b) Jos systeemi on stabiili, määrää sen amplitudivaste. Mitkä taajuudet pääsevät läpi vaimentumatta?

c) Mikä on systeemin vaste herätteeseen $x[n] = 1$? Entä herätteeseen $x[n] = (-1)^n$?

Ratkaisu

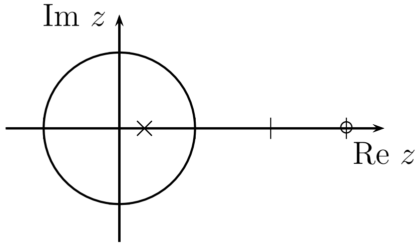
a) $\mathcal{Z}$-muuntamalla

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{3} Y(z) z^{-1} + X(z) - 3X(z) z^{-1} \\ \Leftrightarrow (1 - \frac{1}{3} z^{-1}) Y(z) &= (1 - 3z^{-1}) X(z) \\ Y(z) &= \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} X(z) \end{aligned}$$

Siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{z - 3}{z - \frac{1}{3}}.$$

Nollat: $z-3=0 \;\Leftrightarrow\; z=3$, navat $z-\frac{1}{3}=0 \;\Leftrightarrow\; z=\frac{1}{3}$.



Ainoa napa on yksikköympyrän sisällä, joten systeemi on stabiili.

b) Taajuusvastefunktio

$$H(\omega)=H(z)|_{z=e^{i\omega}}=\frac{1-3e^{-i\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-i\omega}}$$

Amplitudivaste: koska $e^{-i\omega}=\cos(-\omega)+i\sin(-\omega)=\cos\omega-i\sin\omega$, saadaan

$$\begin{aligned}|H(\omega)|&=\frac{|1-3\cos\omega+i3\sin\omega|}{|1-\frac{1}{3}\cos\omega+i\frac{1}{3}\sin\omega|}=\frac{\sqrt{(1-3\cos\omega)^2+(3\sin\omega)^2}}{\sqrt{(1-\frac{1}{3}\cos\omega)^2+(\frac{1}{3}\sin\omega)^2}}\\&=\frac{\sqrt{1-6\cos\omega+9\cos^2\omega+9\sin^2\omega}}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\cos\omega+\frac{1}{9}\cos^2\omega+\frac{1}{9}\sin^2\omega}}=\frac{\sqrt{10-6\cos\omega}}{\sqrt{\frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos\omega}}\\&=\frac{\sqrt{10-6\cos\omega}}{\frac{1}{3}\sqrt{10-6\cos\omega}}=3.\end{aligned}$$

Kaikki kulmataajuudet pääsevät läpi vahvistettuna 3:lla (”all-pass”-suodatin).

c) Vaste herätteeseen $x[n]=1=e^{i0\cdot n}$ on

$$y[n]=H(0)\cdot 1=\frac{1-3}{1-\frac{1}{3}}=-3$$

Vaste herätteeseen $x[n]=(-1)^n=e^{i\pi n}$ on

$$y[n]=H(\pi)(-1)^n=\frac{1-3e^{-i\pi}}{1-\frac{1}{3}e^{-i\pi}}\cdot(-1)^n=\frac{1+3}{1+\frac{1}{3}}(-1)^n=3(-1)^n.$$

5. (**n**) Olkoon $m(t)=\operatorname{sinc}(t)$. Laske ja piirrä SSB-moduloidun signaalin

$$x(t)=m(t)\cos 2\pi f_ct-\hat{m}(t)\sin 2\pi f_ct$$

amplitudispektri, kun $f_c=10$ Hz.

Ratkaisu.

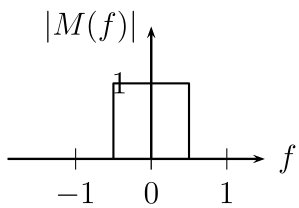
$M(f)=\operatorname{rect}(f)$, $M_+(f)=2\operatorname{rect}(\frac{f-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}})$. Luennoista

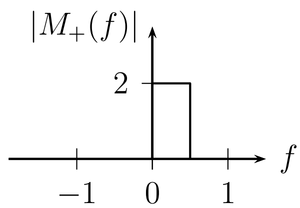
$$\begin{aligned}x_u(t)&=m(t)\cos 2\pi f_ct-\hat{m}(t)\sin 2\pi f_ct\\&=\frac{1}{2}[m_+(t)e^{i2\pi f_ct}+\overline{m_+(t)e^{i2\pi f_ct}}]\end{aligned}$$

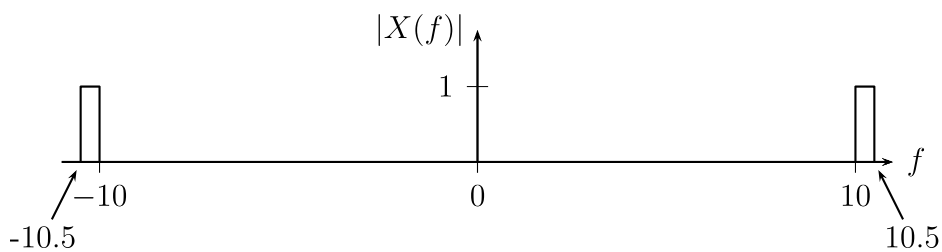
josta kaavalla A10

$$
\begin{aligned}
X_u(f) &= \frac{1}{2}[M_+(f-f_c) + \overline{M_+(-f-f_c)}] \\
\Rightarrow |X_u(f)| &= \frac{1}{2}|M_+(f-f_c)| + \frac{1}{2}|M_+(-f-f_c)| \\
&= \mathrm{rect}(\frac{f-10-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}) + \mathrm{rect}(\frac{-f-10-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}) \\
&= \mathrm{rect}(\frac{f-10.25}{0.5}) + \mathrm{rect}(\frac{f+10.25}{0.5}).
\end{aligned}
$$

(Viimeinen yhtälö suorakaidefunktion parillisuuden nojalla.) Amplitudispektrit:







6. (**n**) Analogisen LTI-systeemi on määritelty differentiaaliyhtälöllä

$$y'(t) + 8y(t) = 3x(t-4),$$

missä $x(t)$ on heräte ja $y(t)$ on vaste. Määrää taajuusvastefunktio, amplitudivaste, vaihevaste ja impulssivaste.

<u>Ratkaisu</u>
Fourier-muunnetaan differentiaaliyhtälö:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow && i2\pi f Y(f) + 8Y(f) = 3X(f)\,\mathrm{e}^{-i2\pi f\cdot 4} \\
&\Rightarrow \text{taajuusvastefunktio} && H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{3\,\mathrm{e}^{-i8\pi f}}{8+i2\pi f} \\
&\ \text{amplitudivaste} && |H(f)| = \frac{|3\,\mathrm{e}^{-i8\pi f}|}{|8+i2\pi f|} = \frac{3}{\sqrt{64+4\pi^2 f^2}} \\
&\ \text{vaihevaste} && \theta(f) = \arg H(f) = -8\pi f - \overline{\mathrm{arc}}\tan(\frac{\pi f}{4}) \\
&\ \text{impulssivaste} && h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = 3\,\mathrm{e}^{-8(t-4)}u(t-4)
\end{aligned}
$$