Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 3 syksy 2024

1. **(e)** Esitehtävä: vastaukset Moodlessa

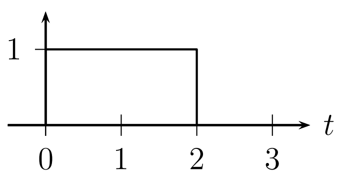
2. **(e)** Esitehtävä: vastaukset Moodlessa

3. **(p)** Kun LTI-systeemin heräte on kuvan (i) signaali, on vaste kuvan (ii) signaali.

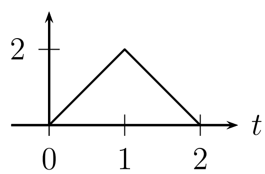
   a) Piirrä vaste, kun heräte on kuvan (iii) signaali.

   b) Piirrä vaste, kun heräte on kuvan (iv) signaali.

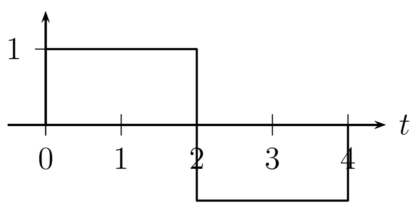
   c) Erään toisen LTI-systeemin vaste herätteeseen $x(t) = u(t)$ on $y(t) = u(-1-t)$. Hahmottele tämän systeemin vaste kuvan (v) signaaliin.



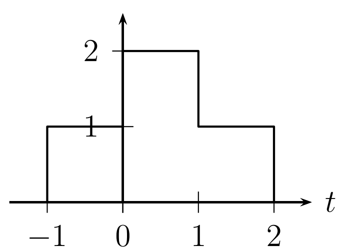
(i)



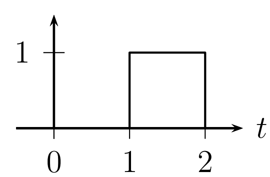
(ii)



(iii)



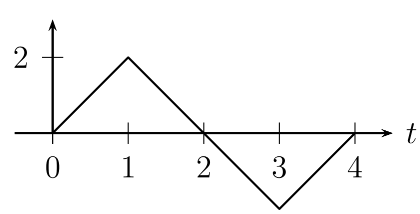
(iv)



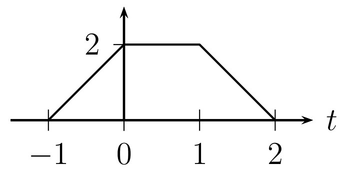
(v)

<u>Ratkaisu</u> Olkoon kuvan (i) heräte $x_0(t)$ ja kuvan (ii) vaste $y_0(t)$.

a) Kuvan (iii) heräte on $x_0(t) - x_0(t-2)$, jonka vaste on $y_0(t) - y_0(t-2)$.

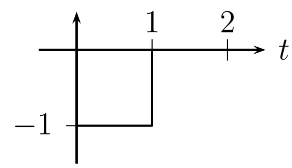


b) Kuvan (iv) heräte on $x_0(t+1) + x_0(t)$, jonka vaste on $y_0(t+1) + y_0(t)$.



c) Kuvan (v) heräte on $u(t-1)-u(t-2)$, jonka vaste on

$$\begin{aligned} y(t-1)-y(t-2) &= u(-1-(t-1))-u(-1-(t-2)) \\ &= u(-t)-u(1-t) \end{aligned}$$



Seuraava on heille, jotka yrittivät ratkaista impulssivasteen: se on mahdollista! Huomaa, että impulssivastetta ei tarvinnut tässä tehtävässä, joten tämä on vain lystinpitoa.

Laplace-muuntamalla kuvien (i) ja (ii) signaalit saadaan $X(s) = \frac{1}{s}(1-e^{-2s})$ ja $Y(s) = \frac{2}{s^2}(1-2e^{-s}+e^{-2s})$. Siirtofunktio, jos se on olemassa, on

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s}\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{1-e^{-2s}} = \frac{2}{s}\Big(-1+2\frac{1}{1-e^{-2s}}-2\frac{1}{1-e^{-2s}}e^{-s}\Big).$$

Kun Re $s>0$, saadaan kaksi suppenevaa geometrista sarjaa

$$H(s) = -\frac{2}{s}+\frac{4}{s}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-s\cdot 2k} - \frac{4}{s}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-s\cdot(2k+1)},$$

Koska $\mathcal{L}\{u(t-n)\} = \frac{1}{s}e^{-sn}$, Re $s>0$, saadaan impulssivasteeksi

$$\begin{aligned} h(t) &= -2u(t)+4[u(t)+u(t-2)+u(t-4)+\cdots]-4[u(t-1)+u(t-3)+u(t-5)+\cdots] \\ &= \begin{cases} 0, & t<0 \\ 2, & 2k<t<2k+1,\ k=0,1,2,\ldots \\ -2, & 2k+1<t<2k+2,\ k=0,1,2,\ldots \end{cases} \end{aligned}$$

Myös $h(-t)$ on käypä impulssivaste (valitse edellä Re $s<0$).

4. **(p)** Tasoitussuodattimen impulssivaste on $h(t) = \mathrm{rect}(t - \frac{1}{2})$.

a) Onko suodatin kausaalinen?

b) Määrää suodattimen taajuusvastefunktio, amplitudivaste ja vaihevaste.

c) Määrää suodattimen vaste signaaliin $x_1(t) = \cos(3\pi t)$.

d) Määrää suodattimen vaste signaaliin $x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t-n)$, missä $a_n \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu

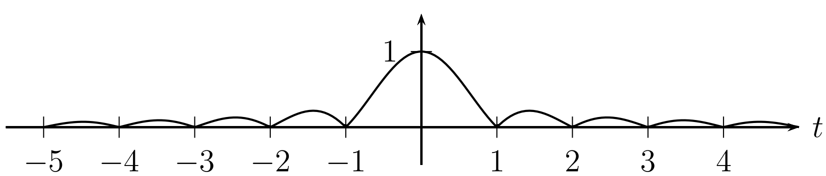
a) $h(t) = 0$ kun $t < 0$, joten suodatin on kausaalinen.

b) Taajuusvastefunktio

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathrm{sinc}(f) e^{-i2\pi f \cdot \frac{1}{2}} = \mathrm{sinc}(f) e^{-i\pi f},$$

Amplitudivaste

$$|H(f)| = |\,\mathrm{sinc}(f) e^{-i\pi f}| = |\,\mathrm{sinc}(f)|,$$



Vaihevaste

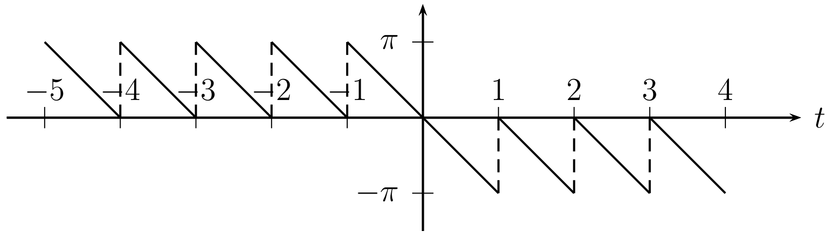
$$\theta(f) = \arg \mathrm{sinc}(f) + \arg e^{-i\pi f} = \begin{cases} -\pi f, & \text{kun } \mathrm{sinc}(f) > 0 \\ \pi - \pi f, & \text{kun } \mathrm{sinc}(f) < 0. \end{cases}$$

Koska

$$\mathrm{sinc}(f) = \frac{\sin \pi f}{\pi f} > 0, \text{ kun } 2k < |f| < 2k+1$$
$$\mathrm{sinc}(f) < 0, \text{ kun } 2k+1 < |f| < 2k+2,$$

missä $k = 0, 1, 2, \ldots$, saadaan argumentin 2π-jaksollisuuden nojalla

$$\theta(f) = \begin{cases} -\pi f + 2k\pi, & 2k < |f| < 2k+1 \\ -\pi f + (2k+1)\pi, & 2k+1 < |f| < 2k+2. \end{cases}$$



c) Signaalin $x_1(t) = \cos(3\pi t)$ taajuus on $\frac{3}{2}$, joten vaste on

$$|H(\frac{3}{2})|\cos(3\pi t + \theta(\frac{3}{2})) = |\operatorname{sinc}(\frac{3}{2})|\cos(3\pi t - \frac{\pi}{2}) = |\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}}|\sin(3\pi t) = \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi t)$$

d) Vaste näytejonoon $x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t-n)$ on

$$\begin{aligned} h(t) * x_2(t) &= \operatorname{rect}(t - \frac{1}{2}) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \operatorname{rect}(t - \frac{1}{2}) * \delta(t-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \operatorname{rect}(t - n - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

(Kyseessä on 0:nnen asteen pitopiiri, eli paloittain vakio rekonstruktio näytteistä.)

5. **(n)** Olkoon aikadiskreetit signaalit $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 0, 0\}$ ja $y[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, -1, 0, 0\}$.

a) Sykliselle konvoluutiolle ja diskreetille Fourier-muunnokselle (DFT) pätee $x[n] \circledast y[n] \leftrightharpoons X[k]Y[k]$. Laske DFT:n avulla $x[n] \circledast y[n]$:

1° Laske 4 pisteen DFT:t $X[k]$ ja $Y[k]$, $k = 0, 1, 2, 3$.

2° laske käänteismuunnos tulolle $X[k]Y[k]$.

b) Laske aikadiskreetti Fourier-muunnos (DTFT) $X(\omega)$ signaalille $x[n]$. Mikä yhteys DFT:llä ja DTFT:llä on?

Ratkaisu

a) Olkoon $z[n] = x[n] \circledast y[n] \;\Rightarrow\; Z[k] = X[k]Y[k]$.

$$\begin{array}{lll} X[0] = 1 + 1 = 2 & Y[0] = 1 - 1 = 0 & Z[0] = 2 \cdot 0 = 0 \\ X[1] = 1 - i & Y[1] = 1 - (-i) = 1 + i & Z[1] = (1 - i)(1 + i) = 2 \\ X[2] = 1 - 1 = 0 & Y[2] = 1 - (-1) = 2 & Z[0] = 0 \cdot 2 = 0 \\ X[3] = \overline{X[1]} = 1 + i & Y[3] = \overline{Y[1]} = 1 - i & Z[3] = (1 + i)(1 - i) = 2 \end{array}$$

IDFT: $x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{3} X[k] e^{i2\pi\frac{kn}{N}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k] e^{i\frac{\pi}{2}kn}$

$$\begin{aligned} z[0] &= \frac{1}{4}(0 + 2 + 0 + 2) = 1 \\ z[1] &= \frac{1}{4}(0 + 2i - 0 - 2i) = 0 \\ z[2] &= \frac{1}{4}(0 - 2 + 0 - 2) = -1 \\ z[3] &= \frac{1}{4}(0 - 2i - 0 + 2i) = 0 \end{aligned}$$

b) $X(\omega) = 1 + e^{-i\omega}$. Vertaamalla kaavoja H11 ja H13 $X[k] = X(\omega)|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = X(\omega)|_{\omega = \frac{\pi}{2}k}$.

6. **(n)** Tuottaja N.N. lisää vokalistin ääniraidalle kaikuefektin, joka on LTI-systeemi. Systeemin impulssivaste on $h(t) = \delta(t) + \delta(t-2)$ (aikayksikkö valittu sopivasti).

a) Määrää systeemin taajuusvastefunktio, amplitudivaste ja vaihevaste.

b) Solisti Signe Wave laulaa todella puhtaasti, kappaleen huippukohdassa hänen äänensä noudattaa puhdasta siniaaltoa $x(t) = \sin(\frac{5\pi t}{2})$. Mikä signaali tulee tällöin kaikulaitteesta ulos? Entäpä kun hän laulaa oktaavia korkeammalta, jolloin taajuus kaksinkertaistuu?

Ratkaisu.

a) Taajuusvastefunktio

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = 1 + e^{-i2\pi f\cdot 2} = e^{-i2\pi f}(e^{i2\pi f} + e^{-i2\pi f}) = e^{-i2\pi f} 2\cos(2\pi f).$$

Amplitudivaste

$$|H(f)| = |2\cos(2\pi f)|$$

Vaihevaste

$$\theta(f) = \arg H(f) = \arg e^{-i2\pi f} + \arg 2\cos(2\pi f) = \begin{cases} -2\pi f, & \text{kun } \cos 2\pi f > 0 \\ -2\pi f + \pi, & \text{kun} \cos 2\pi f < 0. \end{cases}$$

b) $x(t) = \sin(2\pi\frac{5}{4}t)$, joten taajuus on $\frac{5}{4}$. Silloin vaste herätteeseen $\sin\frac{5\pi}{2}t$ on

$$y(t) = |H(\frac{5}{4})|\sin(\frac{5\pi}{2}t + \theta(\frac{5}{4})) = 0,$$

koska $|H(\frac{5}{4})| = |2\cos 2\pi\frac{5}{4}| = 2\cos\frac{5\pi}{2} = 0$. Jos taajuus on $\frac{5}{2}$ ja $x(t) = \cos(5\pi t)$, niin

$$|H(\frac{5}{2})| = |2\cos 2\pi\frac{5}{2}| = |2\cdot(-1)| = 2$$
$$\theta(\frac{5}{2}) = -2\pi\frac{5}{2} + \pi = -4\pi$$

joten $y(t) = 2\sin(5\pi t - 4\pi) = 2\sin(5\pi t)$.