Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 2 syksy 2024

1. **(e)** Esitehtävä: Vastaukset stackissa
2. **(e)** Esitehtävä: Vastaukset stackissa
3. **(p)** Aikadiskreetti signaali $x[n] = (-1)^n$ on saatu näytteistämällä aikajatkuva signaali $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ yhden millisekunnin näytteistysvälillä.

   a) Anna ainakin kolme mahdollista taajuutta f_0.

   b) Määrää taajuus f_0, kun tiedetään että f_0 on välillä 7 kHz – 8 kHz.

   Ratkaisu

   a) Koska $(-1)^n = \cos \pi n$, saadaan yhtälö

   $$x(t)|_{t=n\cdot 10^{-3}} = \cos(2\pi f_0 \frac{n}{1000}) = \cos(\pi \frac{f_0}{500} n) = \cos \pi n,$$

   joka toteutuu kun $f_0 = 500$. Kosinin 2π-jaksollisuuden nojalla

   $$\cos(\pi \frac{f_0}{500} n) = \cos(\pi \frac{f_0}{500} n - 2\pi n) = \cos \pi n$$

   joten ratkaisuksi käy myös $\pi \frac{f_0}{500} n - 2\pi n = \pi n \;\Leftrightarrow\; f_0 = 1500$ Hz. Samalla tavalla yhtälöstä

   $$\cos(\pi \frac{f_0}{500} n - 4\pi n) = \cos \pi n$$

   saadaan ratkaisu $f_0 = 2500$ Hz.

   b) Yleisesti

   $$\cos(\pi \frac{f_0}{500} n - 2\pi n k) = \cos(\pi n)$$

   toteutuu kun

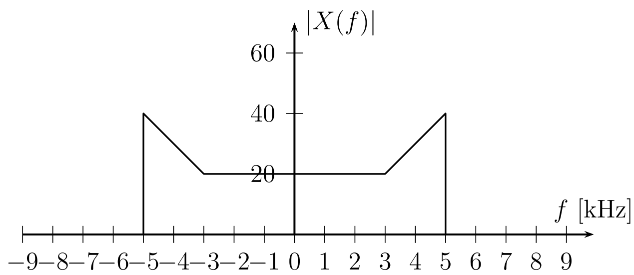
   $$\pi \frac{f_0}{500} n = \pi n + 2\pi n k, \;\; k \in \mathbb{Z}$$
   $$f_0 = 500 + k1000, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

   Välille 7 kHz – 8 kHz. sattuu taajuus $f_0 = 7500$ Hz.

4. **(p)** Parillisen analogisen signaalin $x(t)$ amplitudispektri on kuvion mukainen. Piirrä $x(t)$:stä otetun näytejonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$ amplitudispektri, kun näytteenottoväli on

   (a) $T = 0.125$ ms (b) $T = 0.1$ ms.

   Tapahtuuko kohdissa (a) ja (b) laskostumista? Mikä on signaaliin liittyvä kriittinen näytteenottotaajuus eli ns. Nyquistin taajuus?



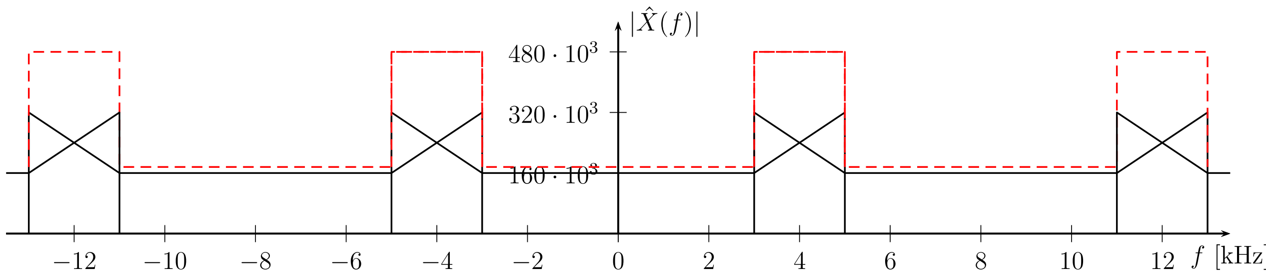
Ratkaisu . . . . . .

Näytteenotossa signaali $x(t)$ kerrotaan impulssijonolla $\Delta(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$,

$$\hat{x}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

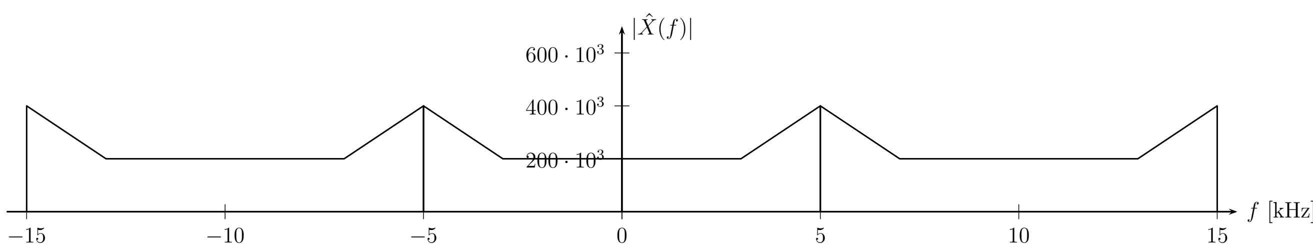
missä T on näytteenottoväli. 6.(c)-kohdan perusteella saadaan kuvat

a) $T = 0.125$ ms $\Rightarrow f_s = 8$ kHz. $\hat{X}(f) = 8 \cdot 10^3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - 8n)$



Kopiot menevät osin päällekkäin, joten laskostumista tapahtuu. (Parillisen signaalin Fourier-muunnos on reaalinen ja parillinen, joten päällekkäin menevät osat ovat saman merkkisiä ja summautuvat amplitudispektrissä.)

b) $T = 0.1$ ms $\Rightarrow$ $f_s = 10$ kHz. $\hat{X}(f) = 10^4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - 10n)$



Kopiot eivät mene päällekkäin, jote laskostumista ei tapahdu.

Nyquistin taajuus f_N on pienin näytteenottotaajuus, jolla laskostumista ei tapahdu. Tehtävän signaalin korkein taajuuskomponentti $f_c = 5$ kHz, jolloin

$$f_N = 2f_c = 10 \text{ kHz},$$

mikä oli näytteenottotaajuus b)-kohdassa.

5. (**n**) Olkoon $x(t) = \text{sinc}(2t)\cos(6\pi t)$, missä t on aika sekunteina. Piirrä kuva näytejonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t)$ amplitudispektristä $|\hat{X}(f)|$, kun signaali näytteistetään taajuudella

a) $f_s = 5$ Hz

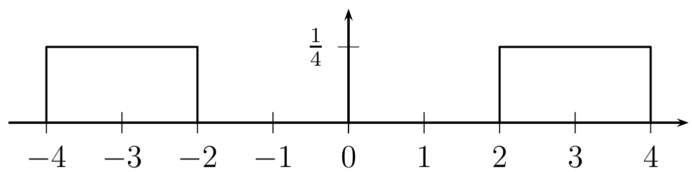
b) $f_s = 10$ Hz.

Tapahtuuko laskostumista? Voidaanko signaali rekonstruoida näytteistään?

Ratkaisu Lasketaan amplitudispektri: kaavakokoelman avulla

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{2}\text{rect}(\frac{f}{2}) * \frac{1}{2}[\delta(f-3)+\delta(f+3)] \\ &= \frac{1}{4}\text{rect}(\frac{f-3}{2}) + \frac{1}{4}\text{rect}(\frac{f+3}{2}) \end{aligned}$$

Amplitudispektrin $|X(f)|$ kuvaaja:



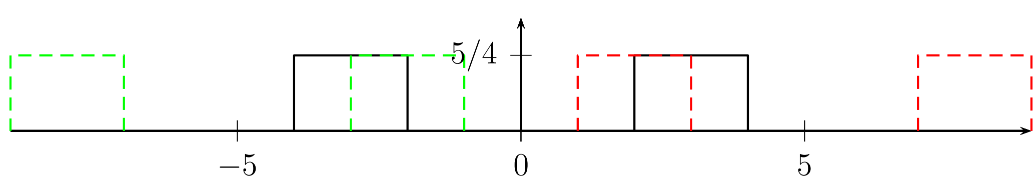
Näytejonon

$$\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

Fourier-muunnos on

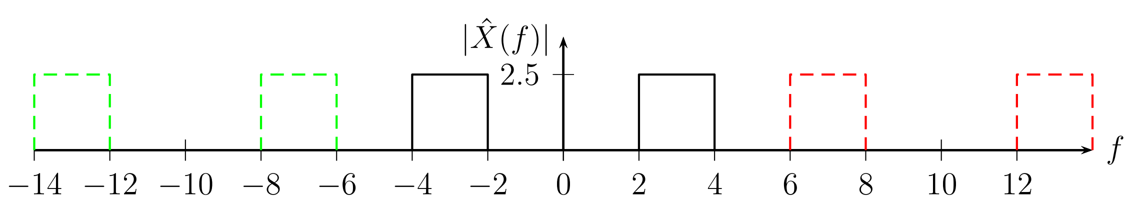
$$\hat{X}(f) = X(f) * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{k}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f-\frac{k}{T})$$

a) $T = \frac{1}{5}$ s
Näytejonon amplitudispektri:



Alueelle $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}] = [-2.5, 2.5]$ laskostuu kopioita, jotka menevät päällekkäin. Signaalia ei voi rekonstruoida näytteistään)

b) $T = \frac{1}{10}$ s
Näytejonon amplitudispektri:



Alueelle $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}] = [-5, 5]$ ei laskostu kopioita. Signaali voidaan rekonstruoida näytteistä.

6. (**n**) a) Näytteenottofunktio $\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ on T-jaksollinen. Määrää sen kompleksinen Fourierin sarja

$$\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}, \quad d_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \Delta(t) e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}\, \mathrm{d}t.$$

b) Käyttäen hyväksi (a)-kohtaa johda kaavakokoelman kaava B17, eli määrää näytteenottofunktion $\Delta(t)$ Fourier-muunnos.

c) Olkoon signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos $X(f)$. Määrää näytejonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t)$ Fourier-muunnos $X(f)$:n avulla.

Ratkaisu

a) Fourierin sarjan kerroin on

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \Delta(t) e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T} e^{-i\frac{2\pi n}{T}\cdot 0} \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned}$$

joten

$$\Delta(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\frac{n}{T}t}.$$

b) Kaavan B11 nojalla

$$\mathcal{F}\{e^{i2\pi\frac{n}{T}t}\} = \delta(f - \frac{n}{T})$$

joten

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\Delta(t)\} &= \mathcal{F}\{\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\frac{n}{T}t}\} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{i2\pi\frac{n}{T}t}\} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T}). \end{aligned}$$

c) Kaavan A11 mukaisesti

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x(t)\Delta(t)\} &= X(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T}) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f - \frac{n}{T}) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{n}{T})
\end{aligned}
$$