Signaalianalyysi 031080A

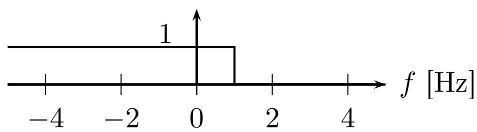
1. välikoe 27.11.2024

Välivaiheet ja perustelut näkyviin! Perustele vastauksesi myös piirrostehtävissä.

1. (a) Piirrä signaali $u(1-t)$. (1 p)
   (b) Tutki laskemalla onko signaali $x(t) = e^t u(1-t)$ energia- tai tehosignaali. (2 p)
   (c) Laske signaalien $x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$ ja $y(t) = u(t)$ konvoluutio. (3 p)

<u>Ratkaisu.</u>

(a) $u(1-t) = \begin{cases} 1, & 1-t > 0 \;\Leftrightarrow\; t < 1 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$



(b)

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |e^t u(1-t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{1} e^{2t} \, dt = \Big/_{-\infty}^{1} \frac{1}{2} e^{2t} = \frac{e^2}{2} < \infty$$

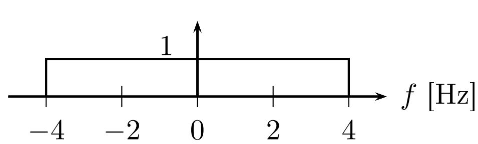
Signaali on energiasignaali.

(c)

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) \, d\tau = \int_{0}^{1} u(t-\tau) \, d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \int_0^t 1 \, dt = t, & 0 < t < 1 \\ \int_0^1 1 \, dt = 1, & t > 1. \end{cases}$$

2. Näytteenotin ottaa analogisesta signaalista $x(t)$ näytteitä T sekunnin välein ja tuottaa aikadiskreetin signaalin $x[n] = x(nT)$.
   (a) Kalibroidaan laite ottamalla signaalista $\cos(8\pi t)$ näytteitä, kun $T = \frac{1}{5}$ s. Määrää näytteistetyn signaalin digitaalinen taajuus (kulmataajuus välillä $[0, \pi]$). (2 p)
   (b) Säädetään laitteen kellotaajuutta siten, että näytteenottoväliksi tulee $T = 1/6$ s, ja näytteistetään signaali $x(t)$, jonka Fourier-muunnos on kuvassa 1. Piirrä näytejonon $\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$ Fourier-muunnos. Tapahtuuko laskostumista? Mikä on signaalin $x(t)$ Nyquistin taajuus? (4 p)

Kuva 1



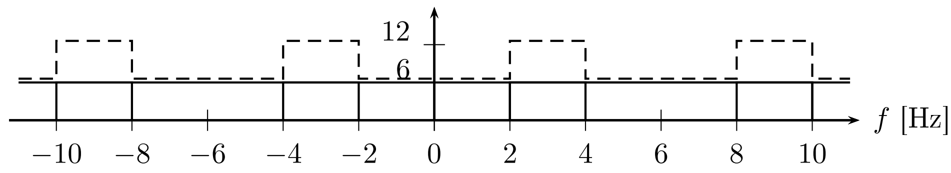
<u>Ratkaisu.</u>

(a)

$$x[n] = \cos(8\pi t)|_{t=\frac{n}{5}} = \cos(\frac{8\pi}{5}n) = \cos(\frac{8\pi n}{5} - 2\pi n) = \cos(-\frac{2\pi n}{5}) = \cos(\frac{2\pi}{5}n)$$

Digitaalinen taajuus on $\frac{2\pi}{5}$.

(b) $\hat{X}(f) = X(f) * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T}) = 6\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - 6k)$



Laskostumista tapahtuu taajuuksilla 2–4 Hz, Nyquistin taajuus on $2 \cdot 4$ Hz=8 Hz, ja näytteistystaajuus oli alle sen.

3. (a) Laske signaalin $x[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 1\}$ 4 pisteen diskreetti Fourier-muunnos $X[k]$ ja aikadiskreetti Fourier-muunnos $X(\omega)$. Piirrä jomman kumman amplitudispektri. Mikä yhteys muunnoksilla on?

(b) Lineaarisen aikainvariantin järjestelmän taajuusvastefunktio on

$$H(f) = \frac{2}{3 + i2\pi f}.$$

Mikä on järjestelmän vaste

i. impulssiin $\delta(t)$, (1 p)

ii. signaaliin $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, kun $f_0 = \frac{3}{2\pi}$. (2 p)

Ratkaisu.

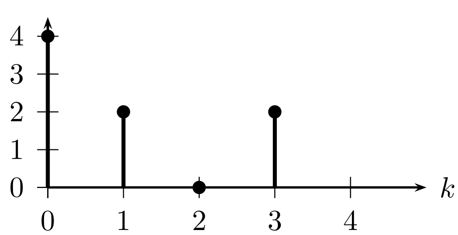
(a) Diskreetti 4 pisteen Fourier-muunnos $X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-i\frac{2\pi kn}{4}} = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-i\frac{\pi}{2}kn}$

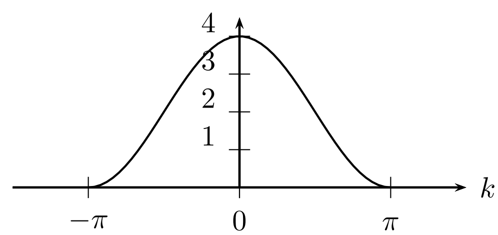
$$\begin{aligned}
X[0] &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4 \\
X[1] &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-i) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot i = -2 \\
X[2] &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -0 \\
X[3] &= \overline{X[1]} = -2.
\end{aligned}$$

Aikadiskreetti Fourier-muunnos

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = 0 \cdot e^{-i\omega 0} + 1 \cdot e^{-i\omega \cdot 1} + 2 \cdot e^{-i\omega \cdot 2} + 1 \cdot e^{-i\omega \cdot 3} \\
&= e^{-i2\omega}(e^{i\omega} + 2 + e^{-i\omega}) = e^{-i2\omega}(2 + 2\cos\omega)
\end{aligned}$$

Amplitudispektrit: $|X[k|] = \{\underset{\uparrow}{4}, 2, 0, 2\}$, $|X(\omega)| = 2 + 2\cos\omega$. Muunnosten välinen yhteys: $X[k] = X(\omega)|_{\omega=\frac{\pi}{2}k}$, $k = 0, 1, 2, 3$ (taajuusnäytteistys)





(b) i. Impulssivaste $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = 2e^{-3t}u(t)$ (kaava B3).

ii. Vaste signaaliin $\cos(2\pi f_0 t)$, kun $f_0 = \frac{3}{2\pi}$ on

$$
\begin{aligned}
|H(\frac{3}{2\pi})|\cos(2\pi\frac{3}{2\pi}t + \arg H(\frac{3}{2\pi})) &= |\frac{2}{3+i3}|\cos(3t + \arg\frac{2}{3+3i}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}\cos(3t - \arctan 1) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos(3t - \frac{\pi}{4}).
\end{aligned}
$$

Toinen ratkaisu (ei suositeltava). Ei pisteitä ensimmäisestä rivistä

$$
\begin{aligned}
Y(f) &= \frac{2}{3+i2\pi f}\frac{1}{2}[\delta(f - \frac{3}{2\pi}) + \delta(f + \frac{3}{2\pi})] \\
&= \frac{1}{3+i3}\delta(f - \frac{1}{2\pi}) + \frac{1}{3-i3}\delta(f + \frac{3}{2\pi}) \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\delta(f - \frac{3}{2\pi}) + \frac{1}{3\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\delta(f + \frac{3}{2\pi}) \\
y(t) &\overset{\text{B11}}{=} \frac{1}{3\sqrt{2}}e^{i(3t-\frac{\pi}{4})} + \frac{1}{3\sqrt{2}}e^{-i(3t-\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cos(3t - \frac{\pi}{4}).
\end{aligned}
$$

Kolmas ratkaisu (ei todellakaan suositeltava tai no... miksikäs ei!):

$$
\begin{aligned}
y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-3\tau}u(\tau)\cos(3(t-\tau))\,d\tau \\
&= 2\int_0^{\infty} e^{-3\tau}u(\tau)\cos(3t - 3\tau)\,d\tau \\
&= 2\Big/_{0}^{\infty} e^{-3\tau}(-\frac{1}{3})\sin(3t-3\tau) - 2\int_0^{\infty} e^{-3\tau}\sin(3t-3\tau) \\
&= \frac{2}{3}\sin(3t) - 2\Big/_{0}^{\infty} e^{-3\tau}\frac{1}{3}\cos(3t-3\tau)\,d\tau - 2\int_0^{\infty} e^{-3\tau}\cos(3t-3\tau)\,d\tau \\
&= \frac{2}{3}\sin(3t) + \frac{2}{3}\cos(3t) - y(t) \\
\Leftrightarrow y(t) &= \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{3}\cos(3t) = A\cos(3t+\phi) = A\cos\phi\cos(3t) - A\sin\phi\sin(3t) \\
&\Rightarrow \begin{cases} A\cos\phi &= \frac{1}{3} \\ A\sin\phi &= -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A &= \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \phi &= \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Siispä $y(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}\cos(3t - \frac{\pi}{4})$.

4. (a) Differenssiyhtälö

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] + x[n-1]$$

määrittelee lineaarisen aikainvariantin systeemin, missä $x[n]$ on heräte ja $y[n]$ on vaste. Määrää systeemin siirtofunktio sekä taajuusvastefunktio jos se on olemassa. Määrää vaste herätteeseen $x[n] = (-1)^n$.

(b) Tarkastellaan signaalia $x(t) = \text{sinc}(2t)$.

i. Määrää signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos.

ii. Piirrä signaalin $x(t)$ Hilbert-muunnoksen $\hat{x}(t)$ amplitudispektri. (Merkintää $\hat{x}(t)$ ei tule sekoittaa näytejonoon, jota merkitään samalla symbolilla.)

iii. Piirrä signaalin $x_+(t) = x(t) + i\hat{x}(t)$ amplitudispektri, missä $\hat{x}(t)$ on signaalin $x(t)$ Hilbert-muunnos.

Ratkaisu.

(a) $\mathcal{Z}$-muuntamalla yhtälö

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} + X(z) + X(z)z^{-1} \\
\Leftrightarrow (1 - z^{-1})Y(z) &= (1 + z^{-1})X(z) \\
\Leftrightarrow Y(z) &= \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}X(z)
\end{aligned}
$$

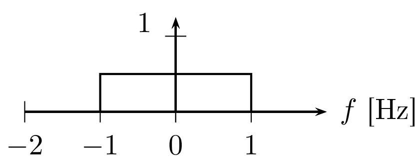
Siirtofunktio on $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ ja taajuusvastefunktio $H(\omega) = \frac{1+e^{-i\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-i\omega}}$. Vaste herätteeseen $x[n] = (-1)^n = e^{i\pi n}$ on

$$
y[n] = H(\pi)(-1)^n = \frac{1 + e^{-i\pi}}{1 - \frac{1}{2}e^{-i\pi}}(-1)^n = 0.
$$

(tai käytä amplitudi- ja vaihevastetta)

(b) i. Kaavalla B2 $X(f) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}(\frac{f}{2})$

ii. $|\hat{X}(f)| = |-i\,\mathrm{sgn}\, f X(f)| = |X(f)|$



iii. $X_+(f) = X(f) + i\hat{X}(f) = X(f) - i\,\mathrm{sgn}\, f X(f) = \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0. \end{cases}$