Signaalianalyysi 031080A

Harjoitus 7 syksy 2024

(**e**): esikotitehtävä, josta saa pisteitä ja joka tehdään stackissa
(**p**): tuntitehtävä, josta saa pisteitä
(**n**): normaali tuntitehtävä, josta ei saa pisteitä

1.-2. (**e**) Tee STACK-tehtävät hyväksytysti keskiviikkoon 11.12. klo 23.59 mennessä ja näytä paperilla harjoituksissa saadaksesi pisteet.

3. (**p**) Tarkastellaan LTI-systeemiä, joka on määritelty integraaliyhtälöllä

$$Y(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} X(\tau)\, d\tau.$$

Olkoon heräte $X(t)$ stationaarista valkoista kohinaa, jonka tehotiheys on $S_X(f) = \frac{N_0}{2}$. Määrää

(a) herätteen ja vasteen ristitehotiheysspektri $S_{XY}(f)$
(b) herätteen ja vasteen ristikorrelaatiofunktio $R_{XY}(\tau)$
(c) vasteen tehotiheysspektri $S_Y(f)$
(d) vasteen autokorrelaatiofunktio $R_Y(\tau)$.

Opastus: kirjoita integraali konvoluutiona selvittääksesi impulssivasteen ja taajuusvastefunktion.

4.(**p**) Linear Predictive Coding (LPC) on puheenkoodauksessa käytettävä menetelmä, missä puhesignaalin $X(t)$ näytettä $X[n] = X(t_n)$ ennustetaan aiempien näytteiden lineaarikombinaationa

$$X[n] = a[1]X[n-1] + a[2]X[n-2] + \ldots + a[p]X[n-p] + E[n],$$

missä $E[n]$ on mallin virhe. Tätä voidaan toisaalta pitää rekursiivisena suodattimena, missä $E[n]$ on heräte ja $X[n]$ vaste. Kertoimet $a[n]$ valitaan siten, että siirtofunktion napoja vastaavat kulmataajuudet kuvaavat mahdollisimman hyvin koodattavan puhesignaalin resonanssitaajuuksia (ns. formantteja). Voidaan osoittaa, että optimaalisen suodattimen kertoimet saadaan ratkaistua yhtälöryhmästä

$$R_X[m] = \sum_{k=1}^{p} a[k] R_X[m-k], \quad \text{kun } m = 1, 2, \ldots, p.$$

Olkoon tässä $p = 2$. Määrää optimaalisen suodattimen kertoimet, kun signaalin $X[n]$ autokorrelaatiofunktio on $R_X[m] = \cos(\frac{\pi}{4}m)$. (Ohje: sijoita annettuun kaavaan $m = 1$ ja $m = 2$ ja ratkaise yhtälöpari.) Määrää saadun suodattimen siirtofunktio ja navat. Mitä resonanssitaajuuksia navat vastaavat?

5. (**n**) (a) Määrää sellainen kausaalinen LTI-systeemi, jolla voidaan generoida satunnaissignaali $Y(t)$, jonka tehotiheysspektri on

$$S_Y(f) = \frac{8}{100 + 4\pi^2 f^2},$$

käyttämällä herätteenä valkoista kohinaa, jonka tehotiheys on 2. Määrää systeemin taajuusvastefunktio $H(f)$ ja impulssivaste $h(t)$.

(b) Määrää sellainen kausaalinen LTI-systeemi, jonka vaste on valkoista kohinaa tehotiheydellä 1, kun herätteen $X(t)$ tehotiheysspektri on

$$S_X(f) = 1 + \frac{11}{25 + 4\pi^2 f^2}.$$

Anna systeemin taajuusvastefunktio $H(f)$ ja impulssivaste $h(t)$. Ohje: kirjoita aluksi herätteen tehotiheysspektri muodossa $S_X(f) = G(f)\overline{G(f)}$, missä $1/G(f)$ on kausaalisen systeemin taajuusvastefunktio.

6. (**n**) Signaalia $X[n]$ sanotaan ARMA(p,q)-signaaliksi (autoregressive moving average), jos se on differenssiyhtälöllä

$$X[n] + a_1 X[n-1] + \ldots + a_q X[n-q] = b_0 W[n] + b_1 W[n-1] + \ldots + b_p W[n-p]$$

määritellyn systeemin vaste valkoiseen kohinaan $W[n]$, jonka varianssi on σ^2.

Olkoon $X[n]$ ARMA(1,1)-signaali ja $b_0 = 0$, $b_1 = \frac{1}{2}$ ja $a_1 = -\frac{1}{2}$. Määrää kyseisen systeemin siirtofunktio $H(z)$ ja taajuusvastefunktio $H(\omega)$. Määrää signaalin $X[n]$ tehotiheysspektri ja autokorrelaatiofunktio. Millä kulmataajuuksilla tehoa on eniten?