

Signaalianalyysi 031080A

Harjoitus 5 syksy 2024

- (e): esikotitehtävä, josta saa pisteitä
(p): tuntitehtävä, josta saa pisteitä
(n): normaali tuntitehtävä, josta ei saa pisteitä

1.-2. (e) Tee STACK-tehtävät hyväksytysti keskiviikkoon 27.11. klo 23.59 mennessä ja näytä paperilla harjoituksissa saadaksesi pisteet.

3. (p) Kahden satunnaismuuttujan X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-2x}, & \text{kun } x \geq 0, 0 \leq y \leq a, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

- a) Määää vakio a .
b) Määää X :n ja Y :n reunajakaumien tiheysfunktiot. Ovatko muuttujat riippumattomat? Perustele vastauksesi.
c) Laske korrelaatio $E(XY)$ ja määää kovarianssi $\text{Cov}(X, Y)$.

4. (p) Satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssimatriisi on

$$\begin{pmatrix} 4.4 & 1.2 \\ 1.2 & 2.6 \end{pmatrix}.$$

Muodosta X :stä ja Y :stä lineaarisella muunnoksella uudet muuttujat U ja V , jotka ovat korreloimattomia. Mikä on uusien muuttujien kovarianssimatriisi?

5. (n) Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia ja noudattavat eksponenttijakaumaa $\text{Exp}(1)$, jolloin $f_X(x) = e^{-x}u(x)$, $f_Y(y) = e^{-y}u(y)$.

- (a) Mikä on yhteisjakauman tiheysfunktio $f_{X,Y}(x, y)$?
(b) Muodostetaan uudet satunnaismuuttujat Z ja W lineaarisella muunnoksella

$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X + Y \end{pmatrix}.$$

Määää muuttujien Z ja W yhteisjakauman tiheysfunktio $h_{Z,W}(z, w)$.

- (c) Määää integroimalla satunnaismuuttujan W reunajakauman tiheysfunktio $h_W(w)$.
(d) Hoksaaatko tästä, mikä on summan $W = X + Y$ tiheysfunktio yleisesti, kun X ja Y ovat riippumattomia ja niiden tiheysfunktiot ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$? Vinkki: tutki integraalia

$$h_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{Z,W}(z, w) dz$$

b)-kohdan lineaarisen muunnoksen jälkeen.

6. (n) Satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot ovat $\mu_X = 2$ ja $\mu_Y = -1$ sekä varianssit $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 5$. Korrelaatiokerroin on $\rho_{X,Y} = \frac{4}{5}$. Muodostetaan uudet muuttujat $U = X + 2Y$ ja $V = 2X - Y$. Määää

- (a) $E(U)$ ja $E(V)$,
(b) kovarianssimatriisit $C_{X,Y}$ ja $C_{U,V}$ sekä korrelaatiokerroin $\rho_{U,V}$.
(c) Millä lineaarisella muunnoksella olisi saatu korreloimattomat muuttujat U ja V ?