Sian2024_7

Monday, December 9, 2024 8:01 AM

3. (**p**) Tarkastellaan LTI-systeemiä, joka on määritelty integraaliyhtälöllä

$X(t) \xrightarrow{S_X(f)} \boxed{h(t),\ H(f)} \xrightarrow{} Y(t),\ S_Y(f)$

$$Y(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} X(\tau)\, d\tau.$$

$u(t-\tau)$

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} X(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) X(\tau)\, d\tau \overset{J8}{=} \underbrace{e^{-t}u(t)}_{h(t)} * X(t)$$

J23 $\quad h(t) \overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} H(f)$

$\boxed{|a+bi|^2 = a^2+b^2}$

Olkoon heräte $X(t)$ stationaarista valkoista kohinaa, jonka tehotiheys on $S_X(f) = \frac{N_0}{2}$. Määrää

(a) herätteen ja vasteen ristitehotiheysspektri $S_{XY}(f) \overset{J30}{=} \ldots$

(b) herätteen ja vasteen ristikorrelaatiofunktio $R_{XY}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_{XY}(f)]$

(c) vasteen tehotiheysspektri $S_Y(f) \overset{J28}{=} \ldots$

(d) vasteen autokorrelaatiofunktio $R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_Y(f)]$.

Opastus: kirjoita integraali konvoluutiona selvittääksesi impulssivasteen ja taajuusvastefunktion.

4.(**p**) Linear Predictive Coding (LPC) on puheenkoodauksessa käytettävä menetelmä, missä puhesignaalin $X(t)$ näytettä $X[n] = X(t_n)$ ennustetaan aiempien näytteiden lineaarikombinaationa

$$X[n] = a[1]X[n-1] + a[2]X[n-2] + \ldots + a[p]X[n-p] + E[n],$$

missä $E[n]$ on mallin virhe. Tätä voidaan toisaalta pitää rekursiivisena suodattimena, missä $E[n]$ on heräte ja $X[n]$ vaste. Kertoimet $a[n]$ valitaan siten, että siirtofunktion napoja vastaavat kulmataajuudet kuvaavat mahdollisimman hyvin koodattavan puhesignaalin resonanssitaajuuksia (ns. formantteja). Voidaan osoittaa, että optimaalisen suodattimen kertoimet saadaan ratkaistua yhtälöryhmästä

$E[n],\ E(z) \xrightarrow{} \boxed{h[n]} \xrightarrow{} X[n],\ X(z)$

$$\underbrace{H(z)}_{} = \frac{X(z)}{E(z)}$$

$$H(\omega) = H(z)\big|_{z=e^{i\omega}}$$

$$R_X[m] = \sum_{k=1}^{p} a[k]R_X[m-k], \quad \text{kun } m = 1, 2, \ldots, p.$$

$\Rightarrow \begin{cases} m=1: & R_X[1] = \ldots \\ m=2: & R_X[2] = \ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a[1] \\ a[2] \end{cases}$

Olkoon tässä $p = 2$. Määrää optimaalisen suodattimen kertoimet, kun signaalin $X[n]$ autokorrelaatiofunktio on $R_X[m] = \cos(\frac{\pi}{4}m)$. (Ohje: sijoita annettuun kaavaan $m = 1$ ja $m = 2$ ja ratkaise yhtälöpari.) Määrää saadun suodattimen siirtofunktio ja navat. Mitä resonanssitaajuuksia navat vastaavat?

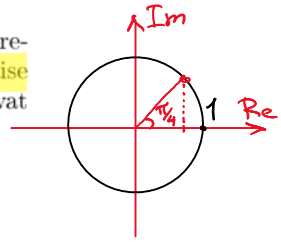

Table D. Trigonometric identities

1. $e^{\pm i\theta} = \underbrace{\cos\theta}_{\text{Re } z} \pm i\sin\theta$

Table B. Fourier transform pairs

	Time function	Fourier transform
1.	$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\text{sinc}(fT)$
2.	$\text{sinc}(2Wt)$	$\frac{1}{2W}\text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$
3.	$e^{-at}u(t), \quad a > 0$	$\frac{1}{a+i2\pi f}$
4.	$e^{-a\|t\|}, \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
5.	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
6.	$\text{tri}(\frac{t}{T})$	$T\text{sinc}^2(fT)$
7.	$\text{sinc}^2(Wt)$	$\frac{1}{W}\text{tri}(\frac{f}{W})$
8.	$\delta(t)$	1
9.	1	$\delta(f)$

Table J

25. $H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi ft}dt$

26. $H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-i2\pi fn}, \qquad H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-i\omega n}$

27. $R_Y(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) * R_X(\tau)$

28. $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f), \qquad S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega)$

29. $R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau)$

30. $S_{XY}(f) = H(f)S_X(f), \qquad S_{XY}(\omega) = H(\omega)S_X(\omega)$

Table E. Properties of the Z-transform

Property	Time domain	z-domain (=ZD)
Notation	$x[n]$	$X(z)$
	$y[n]$	$Y(z)$
1. Linearity	$ax[n] + by[n]$	$aX(z) + bY(z)$
2. Time shifting	$x[n-k]$	$z^{-k}X(z)$

3. (**c**) Consider a LTI-system defined by the ingeral equation

$X(t) \xrightarrow{} \boxed{h(t),\ H(f)} \xrightarrow{} Y(t)$; $S_x(f)$, $S_y(f)$

$$Y(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}X(\tau)\,d\tau.$$

Let the input $X(t)$ be white noise with power spectral density $S_X(f) = \frac{N_0}{2}$. Find

(a) the cross spectral density $S_{XY}(f)$ of the input and the output (330) $= \ldots$

(b) the cross-correlation functiono $R_{XY}(\tau)$ of the input and the output $= \mathcal{F}^{-1}[S_{xy}(f)]$

(c) the power spectral density $S_Y(f)$ of the output (328) $= \ldots$

(d) the autocorrelation function $R_Y(\tau)$ of the output. $= \mathcal{F}^{-1}[S_y(f)]$

Instruction: write the integral as a convolution to find out the impulse response and the frequency response function.

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}X(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)X(\tau)\,d\tau \overset{(H8)}{=} \underbrace{e^{-t}u(t)}_{h(t)} * X(t)$$

(J23) $h(t) \overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} H(f)$

$$\boxed{|a+bi|^2 = a^2+b^2}$$

4.(**c**) Linear Predictive Coding (LPC) is a speech coding method, where the sample $X[n] = X(t_n)$ of speech signal $X(t)$ is predicted as a linear cobination of the previous samples, i.e.

$$X[n] = a[1]X[n-1] + a[2]X[n-2] + \ldots + a[p]X[n-p] + E[n],$$

where $E[n]$ is the error of the model. On the other hand, this can be regarded as a recursive filter with $E[n]$ being the input and $X[n]$ being the output. The coefficients $a[n]$ are chosen in such a way that the angular frequencies corresponding the poles of the transfer function describe as much as possible the resonant frequencies (the so-called formants) of the speech signal to be coded. It can be shown that the coefficients for the optimal filter can be solved from the system of equations

$E[n],\ E(z) \xrightarrow{} \boxed{h[n],\ H(z)} \xrightarrow{} X[n],\ X(z)$

$$\underbrace{H(z)}_{} = \frac{X(z)}{E(z)}$$

$$H(\omega) = H(z)\big|_{z=e^{i\omega}}$$

$$R_X[m] = \sum_{k=1}^{p} a[k]R_X[m-k], \quad \text{for } m = 1, 2, \ldots, p.$$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} m=1: & R_x[1] = \ldots \\ m=2: & R_x[2] = \ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a[1] \\ a[2] \end{cases}$

Let here $p = 2$. Find the coefficients for the optimal filter, when the autocorrelation function for signal $X[n]$ is $R_X[m] = \cos(\frac{\pi}{4}m)$. (Instruction: substitute $m = 1$ and $m = 2$ to the given equation and solve the pair of equations.) Find the transfer function and the poles for the filter. What resonant frequencies do the poles correspond to?

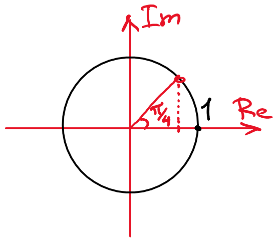

Table D. Trigonometric identities

1. $e^{\pm i\theta} = \underbrace{\cos\theta}_{= \mathrm{Re}\, z} \pm i\sin\theta$