Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 7 syksy 2023

1. (**e**) Esitehtävä: Vastaukset Moodlessa
2. (**e**) Esitehtävä: Vastaukset Moodlessa
3. (**p**) Olkoon $X(t)$ nollaodotusarvoinen stationaarinen signaali, jonka autokorrelaatiofunktio on $R_X(\tau) = e^{-3|\tau|}$. Signaali $X(t)$ on herätteenä LTI-systeemissä, jolloin vasteen autokorrelaatiofunktio on $R_Y(\tau) = 3e^{-|\tau|}$.

   a) Määrää systeemin amplitudivaste.

   b) Oletetaan, että systeemi ja sen käänteissysteemi (jonka taajuusvastefunktio on $1/H(f)$) ovat kausaalisia. Määrää systeemille jokin mahdollinen impulssivaste. Onko ratkaisusi yksikäsitteinen?

   Ratkaisu

   a) Fourier-muuntamalla

   $$S_X(f) = \frac{6}{9 + 4\pi^2 f^2}, \quad S_Y(f) = \frac{6}{1 + 4\pi^2 f^2}.$$

   Kaavasta

   $$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

   saadaan

   $$|H(f)| = \sqrt{\frac{S_Y(f)}{S_X(f)}} = \sqrt{\frac{9 + 4\pi^2 f^2}{1 + 4\pi^2 f^2}}.$$

   b) Kaavalla $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

   $$|H(f)|^2 = H(f)\overline{H(f)} = \frac{3 + i2\pi f}{1 + i2\pi f}\frac{3 - i2\pi f}{1 - i2\pi f}.$$

   Valitsemalla

   $$H(f) = \frac{3 + i2\pi f}{1 + i2\pi f} = 1 + \frac{2}{1 + i2\pi f}$$

   systeemi ja sen käänteissysteemi ovat kausaalisia. Nimittäin impulssivaste

   $$h(t) = \delta(t) + 2e^{-t}u(t) = 0, \text{ kun } t < 0$$

   ja samalla tavalla käänteissysteemin impulssivaste

   $$\mathcal{F}^{-1}\{\frac{1 + i2\pi f}{3 + i2\pi f}\} = \mathcal{F}^{-1}\{1 - \frac{2}{3 + i2\pi f}\} = \delta(t) - 2e^{-3t}u(t) = 0, \text{ kun } t < 0.$$

   Tämä ns. minimivaiheinen LTI-systeemi on (vakiolla -1 kertomista vaille) yksikäsitteinen.

Perustelu (ei tarvitse osata):

1° Kausaalisen systeemin impulssivaste voidaan kirjoittaa

$$h(t) = g(t) + \mathrm{sgn}(t)g(t),$$

missä $g(t) = \frac{1}{2}(h(t) + h(-t))$ on parillinen. Silloin taajuusvastefunktiolle on voimassa

$$H(f) = G(f) - i\mathcal{H}\{G(f)\},$$

missä $G(f)$ on reaalinen funktio ja $\mathcal{H}\{G(f)\}$ sen Hilbert-muunnos. (Vrt. esiverhokäyrä $x + i\hat{x}(t) \leftrightarrow X(f) + \mathrm{sgn}(f)X(f)$ ja kaava A3.) Systeemi on siis kausaalinen, jos

$$\mathrm{Im}\, H(f) = -\mathcal{H}\{\mathrm{Re}\, H(f)\}.$$

2° $H(f) = \frac{3+i2\pi f}{1+i2\pi f}$ on minimivaiheinen, sillä

$$\frac{3 + i2\pi f}{1 + i2\pi f} = 1 + \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2} - i\frac{4\pi f}{1 + 4\pi^2 f^2}$$

ja

$$\frac{1 + i2\pi f}{3 + i2\pi f} = 1 - \frac{6}{9 + 4\pi^2 f^2} + i\frac{4\pi f}{1 + 4\pi^2 f^2}$$

ovat kausaalisia Hilbert-muunnosten

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(1) &= 0 \\ \mathcal{H}(\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}) &= \frac{4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2}, \quad \mathcal{H}(\frac{4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2}) = -\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

nojalla.

3° Olkoon taajuusvastefunktio

$$\begin{aligned} H(f) = \frac{3 + i2\pi f}{1 + i2\pi f}e^{i\theta(f)} =&(1 + \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2})\cos\theta(f) + \frac{4\pi f}{1 + 4\pi^2 f^2}\sin\theta(f) \\ &+ i\left(-\frac{4\pi f}{1 + 4\pi^2 f^2}\cos\theta(f) + (1 + \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2})\sin\theta(f)\right). \end{aligned}$$

Nyt $\mathrm{Im}\, H(f) = -\mathcal{H}\{\mathrm{Re}\, H(f)\}$ vain jos $\sin\theta(f) \equiv 0$ ja $\cos\theta(f) \equiv \pm 1$. Silloin

$$\begin{aligned} H(f) &= \pm\frac{3 + i2\pi f}{1 + i2\pi f} \\ h(t) &= \pm(\delta(t) + 2e^{-t}u(t)) \end{aligned}$$

Vastaavasti $\sin\theta(f) \equiv 0$, $\cos\theta(f) \equiv \pm 1$, kun tarkastellaan käänteissysteemin taajuusvastefunktiota

$$1/H(f) = \frac{1 + i2\pi f}{3 + i2\pi f}e^{-i\theta(f)}.$$

4.(**p**) Signaalia $X[n]$ sanotaan ARMA(p,q)-signaaliksi (autoregressive moving average), jos se on differenssiyhtälöllä

$$X[n] + a_1 X[n-1] + \ldots + a_q X[n-q] = b_0 W[n] + b_1 W[n-1] + \ldots + b_p W[n-p]$$

määritellyn systeemin vaste valkoiseen kohinaan $W[n]$, jonka varianssi on σ^2.

Olkoon $X[n]$ ARMA(1,1)-signaali ja $b_0 = 0$, $b_1 = \frac{1}{2}$ ja $a_1 = -\frac{1}{2}$. Määrää kyseisen systeemin siirtofunktio $H(z)$ ja taajuusvastefunktio $H(\omega)$. Määrää signaalin $X[n]$ tehotiheysspektri ja autokorrelaatiofunktio. Millä kulmataajuuksilla tehoa on eniten?

<u>Ratkaisu</u> $\mathcal{Z}$-muuntamalla yhtälö

$$X[n] - \frac{1}{2} X[n-1] = \frac{1}{2} W[n-1]$$

saadaan

$$\begin{aligned}
(1 - \frac{1}{2} z^{-1}) X(z) &= \frac{1}{2} W(z) z^{-1} \\
X(z) &= \frac{\frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} W(z),
\end{aligned}$$

joten siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

ja taajuusvastefunktio

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{2} e^{-i\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-i\omega}}.$$

Vasteen tehotiheysspektri kaavalla J28

$$\begin{aligned}
S_X(\omega) &= \overline{H(\omega)} H(\omega) S_W(\omega) \\
&= \frac{\frac{1}{2} e^{i\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{i\omega}} \frac{\frac{1}{2} e^{-i\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-i\omega}} \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{i\omega} - \frac{1}{2} e^{-i\omega} + \frac{1}{4}} \\
&= \frac{\sigma^2}{4} \frac{1}{1 - \cos\omega + \frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

Vasteen autokorrelaatiofunktiota varten kirjoitetaan ensin

$$S_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{3} \frac{1 - (\frac{1}{2})^2}{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cos\omega + (\frac{1}{2})^2}$$

josta kaavalla I5

$$R_X[k] = \frac{\sigma^2}{3}(\frac{1}{2})^{|k|}.$$

Tehotiheysspektrin maksimi on kulmataajuudella $\omega = 0$:

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{4}\frac{1}{\frac{5}{4} - \cos\omega} \leq \frac{\sigma^2}{4}\frac{1}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{\sigma^2}{4}\frac{1}{\frac{5}{4} + \cos 0},$$

joten matalia taajuuksia on eniten.

5. (**n**) a) Määrää sellainen kausaalinen LTI-systeemi, jolla voidaan generoida satunnaissignaali $Y(t)$, jonka tehotiheysspektri on

$$S_Y(f) = \frac{8}{100 + 4\pi^2 f^2}$$

käyttämällä herätteenä valkoista kohinaa, jonka tehotiheys on 2. Määrää systeemin taajuusvastefunktio $H(f)$ ja impulssivaste $h(t)$.

b) Määrää sellainen kausaalinen LTI-systeemi, jonka vaste on valkoista kohinaa tehotiheydellä 1, kun herätteen $X(t)$ tehotiheysspektri on

$$S_X(f) = 1 + \frac{11}{25 + 4\pi^2 f^2}.$$

Anna systeemin taajuusvastefunktio $H(f)$ ja impulssivaste $h(t)$. Ohje: kirjoita aluksi herätteen tehotiheysspektri muodossa $S_X(f) = G(f)\overline{G(f)}$, missä $1/G(f)$ on kausaalisen systeemin taajuusvastefunktio.

Ratkaisu

a) Vasteen tehotiheysspektri (kaava J28)

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = H(f)\overline{H}(f)S_X(f)$$

sijoitetaan $S_Y(f)$ ja $S_X(f)$

$$\frac{8}{100 + 4\pi^2 f^2} = H(f)\overline{H}(f) \cdot 2 \qquad \Big| : 2$$

spektraalifaktoroidaan

$$\Leftrightarrow \; H(f)\overline{H}(f) = \underbrace{\frac{2}{10 + i2\pi f}}_{\text{kaus.}} \cdot \underbrace{\frac{2}{10 - i2\pi f}}_{\text{ei-kaus.}}.$$

Systeemin taajuusvastefunktio

$$H(f) = \frac{2}{10 + i2\pi f}.$$

Impulssivaste on taajuusvastefunktion Fourier-käänteismuunnos (kaava B3)

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(\frac{2}{10 + i2\pi f}) = 2e^{-10t}u(t).$$

b) Vasteen tehotiheys on $S_Y(f) = 1$, kun herätteen tehotiheys on

$$S_X(f) = 1 + \frac{11}{25 + 4\pi^2 f^2} = \frac{36 + 4\pi^2 f^2}{25 + 4\pi^2 f^2}.$$

Kaavasta J28 saadaan

$$|H(f)|^2 = H(f)\overline{H(f)} = \frac{S_Y(f)}{S_X(f)} = \frac{25 + 4\pi^2 f^2}{36 + 4\pi^2 f^2} = \underbrace{\frac{5 + i2\pi f}{6 + i2\pi f}}_{\text{kaus.}} \cdot \underbrace{\frac{5 - i2\pi f}{6 - i2\pi f}}_{\text{ei kaus.}}$$

Siis $H(f) = \frac{5+i2\pi f}{6+i2\pi f} = 1 - \frac{1}{6+i2\pi f}$, joten impulssivaste on $h(t) = \delta(t) - \mathrm{e}^{-6t} u(t)$.

6. (**n**) Olkoon harjoituksen 4 tehtävän 4 LTI-systeemissä $M = \frac{2}{3}$, $a = \frac{1}{3}$. Olkoon edelleen herätteenä diskreettiä valkoista kohinaa, joka noudattaa normaalijakaumaa $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Määrää vasteen tehotiheysspektri ja autokorrelaatiofunktio. Määrää myös herätteen ja vasteen ristitehotiheysspektri ja ristikorrelaatiofunktio.

Ratkaisu Kyseisessä tehtävässä systeemin siirtofunktioksi saatiin

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}.$$

Taajuusvastefunktio: sijoitetaan $z = e^{i\omega}$

$$H(\omega) = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3} e^{-i\omega}}.$$

Heräte $X[n]$ on diskreettiä valkoista kohinaa, joka noudattaa normaalijakaumaa $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$, joten sen autokorrelaatiofunktio on

$$\begin{aligned} R_X[m] &= E[X[n]X[n+m]] \\ &= \begin{cases} E(X^2[n]), & m = 0 \\ E(X[n])E(X[n+m]), & m \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma^2 + \mu^2, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \\ &= \sigma^2 \delta[m] \end{aligned}$$

ja tehotiheysspektri (kaava I6)

$$S_X(\omega) = \mathcal{F}[R_X[m]] = \sigma^2, \ \forall \omega.$$

Vasteen tehotiheysspektri

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = H(\omega)\overline{H}(\omega) S_X(\omega) \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3} e^{-i\omega}} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3} e^{i\omega}} \cdot \sigma^2 \\ &= \frac{\frac{4}{9}}{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos(\omega)} \cdot \sigma^2. \end{aligned}$$

Vasteen autokorrelaatiofunktio:

$$S_Y(\omega) = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{2}{3}\cos(\omega) + (\frac{1}{3})^2}\sigma^2 = \frac{1}{2}\frac{1 - (\frac{1}{3})^2}{1 - \frac{2}{3}\cos(\omega) + (\frac{1}{3})^2}\sigma^2,$$

josta kaavalla I5 ja I6

$$R_Y[k] = \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{|k|}\sigma^2.$$

Herätteen ja vasteen ristitehotiheys (kaava J24)

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= H(f)S_X(\omega) \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}e^{-i\omega}} \cdot \sigma^2. \end{aligned}$$

Herätteen ja vasteen ristikorrelaatiofunktio: kaavalla I4

$$R_{XY}[k] = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^k u[k]\sigma^2 = \{\underset{\uparrow}{\frac{2}{3}}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots\}\sigma^2.$$