Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 6 syksy 2023

1. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

2. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

3. (**p**) Olkoon signaali $X(t)$ binääristä kohinaa (ks. luennot), jonka mahdolliset arvot ovat 1 ja -1. Signaalin odotusarvofunktio on $\mu_X(t) \equiv 0$ ja autokorrelaatiofunktion on $R_X(\tau) = \operatorname{tri}(\tau)$. Mikä ovat seuraavien signaalien odotusarvo- ja autokorrelaatiofunktiot?

   a) $A(t) = 2X(t)$

   b) $B(t) = 2 + X(t)$

   c) $C(t) = X^2(t)$

   d) $D(t) = X(t) + X(t-2)$

   Ratkaisu

   a) $\mu_A(t) = E[2X(t)] = 2E[X(t)] = 2 \cdot 0 = 0$

   $$\begin{aligned} R_A(t, t+\tau) &= E[A(t)A(t+\tau)] = E[2X(t) \cdot 2X(t+\tau)] \\ &= 4E[X(t)X(t+\tau)] = 4R_X(\tau) = 4\operatorname{tri}(\tau). \end{aligned}$$

   b) $\mu_B(t) = E[2 + X(t)] = 2 + E[X(t)] = 2 + 0 = 2$

   $$\begin{aligned} R_B(t, t+\tau) &= E[A(t)A(t+\tau)] = E[(2 + X(t))(2 + X(t+\tau))] \\ &= 4 + 2E[X(t)] + 2E[X(t+\tau)] + E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= 4 + R_X(\tau) = 4 + \operatorname{tri}(\tau). \end{aligned}$$

   c) Nyt $C(t) = X^2(t) \equiv 1$ kaikilla t, joten $\mu_C(t) = E[X^2(t)] = E[1] = 1$.

   $$R_C(t, t+\tau) = E[C(t)C(t+\tau)] = E[X^2(t)X^2(t+\tau)] = E[1 \cdot 1] = 1.$$

   d) $\mu_D(t) = E[X(t) + X(t-2)] = E[X(t)] + E[X(t-2)] = 0 + 0 = 0$

   $$\begin{aligned} R_D(t, t+\tau) &= E[D(t)D(t+\tau)] = E[(X(t) + X(t-2))(X(t+\tau) + X(t+\tau-2))] \\ &= E[X(t)X(t+\tau)] + E[X(t)X(t+\tau-2)] \\ &\quad + E[X(t-2)X(t+\tau)] + E[X(t-2)X(t+\tau-2)] \\ &= R_X(\tau) + R_X(\tau-2) + R_X(\tau+2) + R_X(\tau) \\ &= 2\operatorname{tri}(\tau) + \operatorname{tri}(\tau-2) + \operatorname{tri}(\tau+2). \end{aligned}$$

4. (**p**) Olkoon $Y(t) = X(t)\cos(2\pi t + \Theta)$, missä $\Theta \sim \mathrm{U}(0, 2\pi)$. $X(t)$ on Θ:sta riippumaton satunnaissignaali, jonka odotusarvofunktio on $E[X(t)] = 1$ ja autokorrelaatiofunktio on $R_X(\tau) = 1 + e^{-|\tau|}$. Laske $Y(t)$:n odotusarvofunktio, autokorrelaatiofunktio ja määrää $Y(t)$:n keskimääräinen teho. Onko $Y(t)$ stationaarinen?

Ratkaisu

$Y(t)$:n odotusarvofunktio

$$
\begin{aligned}
E[Y(t)] &= E[X(t)\cos(2\pi t + \Theta)] \\
&\quad (X(t) \text{ on } \Theta\text{:sta riippumaton}) \\
&= E[X(t)]E[\cos(2\pi t + \Theta)] \\
&= 1 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(2\pi t + \theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \Big/_0^{2\pi} \sin(2\pi t + \theta) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\sin(2\pi t + 2\pi) - \sin(2\pi t)\Big] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$Y(t)$:n autokorrelaatiofunktio

$$
\begin{aligned}
R_Y(t, t+\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= E[X(t)\cos(2\pi t + \Theta)X(t+\tau)\cos(2\pi t + 2\pi\tau + \Theta)] \\
&\quad (X(t) \text{ on } \Theta\text{:sta riippumaton, } \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))) \\
&= \frac{1}{2}E[X(t)X(t+\tau)]E[\cos(2\pi\tau) + \cos(4\pi t + 2\pi\tau + 2\Theta)] \\
&= \frac{1}{2}R_X(\tau)\left[\cos(2\pi\tau) + \int_0^{2\pi} \cos(4\pi t + 2\pi\tau + 2\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}R_X(\tau)\Big[\cos(2\pi\tau) + \frac{1}{4\pi}\Big/_0^{2\pi} \sin(4\pi t + 2\pi\tau + 2\theta)\Big] \\
&\quad (\text{integrointi yli kahden jakson} = 0) \\
&= \frac{1}{2}R_X(\tau)\cos(2\pi\tau) \\
&= \frac{1}{2}(1 + e^{-|\tau|})\cos(2\pi\tau).
\end{aligned}
$$

Keskimääräinen teho $P_Y = E[Y^2(t)] = R_Y(0) = 1$.

$Y(t)$ on stationaarinen, koska $E[Y(t)]$ ja $R_Y(t, t+\tau)$ ovat ajasta t riippumattomia.

5. (**n**) Olkoon $A(t)$ ja $B(t)$ riippumattomia, nollaodotusarvoisia stationaarisia satunnaissignaaleja, joilla on sama autokorrelaatiofunktio $R_A(\tau) = R_B(\tau) = e^{-|\tau|}$.

   a) Tutki ovatko signaalit $X(t) = A(t)\sin t$ ja $Y(t) = B(t)\cos t$ stationaarisia.

b) Laske ristikorrelaatiofunktio $R_{XY}(t, t+\tau)$. Ovatko $X(t)$ ja $Y(t)$ yhteisstationaariset?

c) Tutki onko signaali $Z(t) = X(t) + Y(t)$ stationaarinen.

Ratkaisu

a)

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= E[A(t)\sin t] = E[A(t)]\sin t = 0 \\
R_X(t, t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E[A(t)\sin t A(t+\tau)\sin(t+\tau)] \\
&= E[A(t)A(t+\tau)]\sin t \sin(t+\tau) = e^{-|\tau|}\sin t \sin(t+\tau)
\end{aligned}
$$

Esim. $R_X(0,\pi) = -e^{-\pi} \neq R_X(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = 0$, joten $X(t)$ ei ole stationaarinen. Samalla tavalla

$$
\begin{aligned}
E[Y(t)] &= 0 \\
R_Y(t, t+\tau) &= e^{-|\tau|}\cos t \cos(t+\tau)
\end{aligned}
$$

Esim. $R_Y(0,\pi) = 0 \neq R_Y(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = -e^{-\pi}$, joten $Y(t)$ ei ole stationaarinen.

b) Koska $A(t)$ ja $B(t)$ ovat riippumattomat ja nollaodotusarvoiset,

$$
\begin{aligned}
R_{XY}(t, t+\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] = E[A(t)\sin t B(t+\tau)\cos(t+\tau)] \\
&= E[A(t)]E[B(t)]\sin t \cos(t+\tau) = 0.
\end{aligned}
$$

Nyt $R_{XY}(t, t+\tau)$ ei riipu t:stä, mutta koska $X(t)$ ja $Y(t)$ eivät ole stationaariset, ne eivät ole myöskään yhteisstationaariset.

c) $Z(t) = X(t) + Y(t)$

$$
E[Z(t)] = E[X(t) + Y(t)] = E[X(t)] + E[Y(t)] = 0
$$

$$
\begin{aligned}
R_Z(t, t+\tau) &= E[Z(t)Z(t+\tau)] = E[(X(t)+Y(t))(X(t+\tau)+Y(t+\tau))] \\
&= E[X(t)X(t+\tau) + X(t)Y(t+\tau) + X(t+\tau)Y(t) + Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= R_X(t, t+\tau) + \underbrace{R_{XY}(t, t+\tau)}_{\overset{\text{b)}}{=}0} + \underbrace{R_{YX}(t, t+\tau)}_{=0,\text{ kuten } R_{XY}(t,t+\tau)} + R_Y(t, t+\tau) \\
&= R_X(t, t+\tau) + R_Y(t, t+\tau) \\
&= e^{-|\tau|}\sin t \sin(t+\tau) + e^{-|\tau|}\cos t \cos(t+\tau) \\
&\overset{\text{D7}}{=} e^{-|\tau|}\cos\tau
\end{aligned}
$$

$E[Z(t)] = 0$ ja $R_Z(t, t+\tau) = R_Z(\tau)$ eivät riipu ajasta t, joten $Z(t)$ on stationaarinen.

6. (**n**) Tarkastellaan stationaarisen aikadiskreetin satunnaissignaalin $X[n]$ aikakeskiarvoa

$$
Y_N = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} X[n].
$$

a) Olkoon $X[n]$ jono riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden odotusarvo on $\mu = 0$ ja varianssi σ^2. Osoita että tällöin aikakeskiarvo Y_N on odotusarvon μ **harhaton ja tarkentuva estimaattori**, s.o.

$$E[Y_N] = \mu, \qquad \lim_{N\to\infty} E[(Y_N - \mu)^2] = 0.$$

b) Millä ehdolla aikakeskiarvo on stationaarisen satunnaissignaalin $X[n]$ harhaton ja tarkentuva estimaattori yleisesti?

Ratkaisu

a)

$$E[Y_N] = E\left\{\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} X[n]\right\} = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} E\{X[n]\} = 0.$$

$$\begin{aligned}
E[(Y_N-\mu)^2] = E[Y_N^2] &= E\left\{\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} X[n]\right)^2\right\} \\
&= E\left\{\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} X[n]\right)\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} X[k]\right)\right\} \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N} \underbrace{E[X[n]X[k]}_{=\begin{cases}\sigma^2, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}}\ ] \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2}(2N+1)\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2N+1} \to 0,\ N\to\infty.
\end{aligned}$$

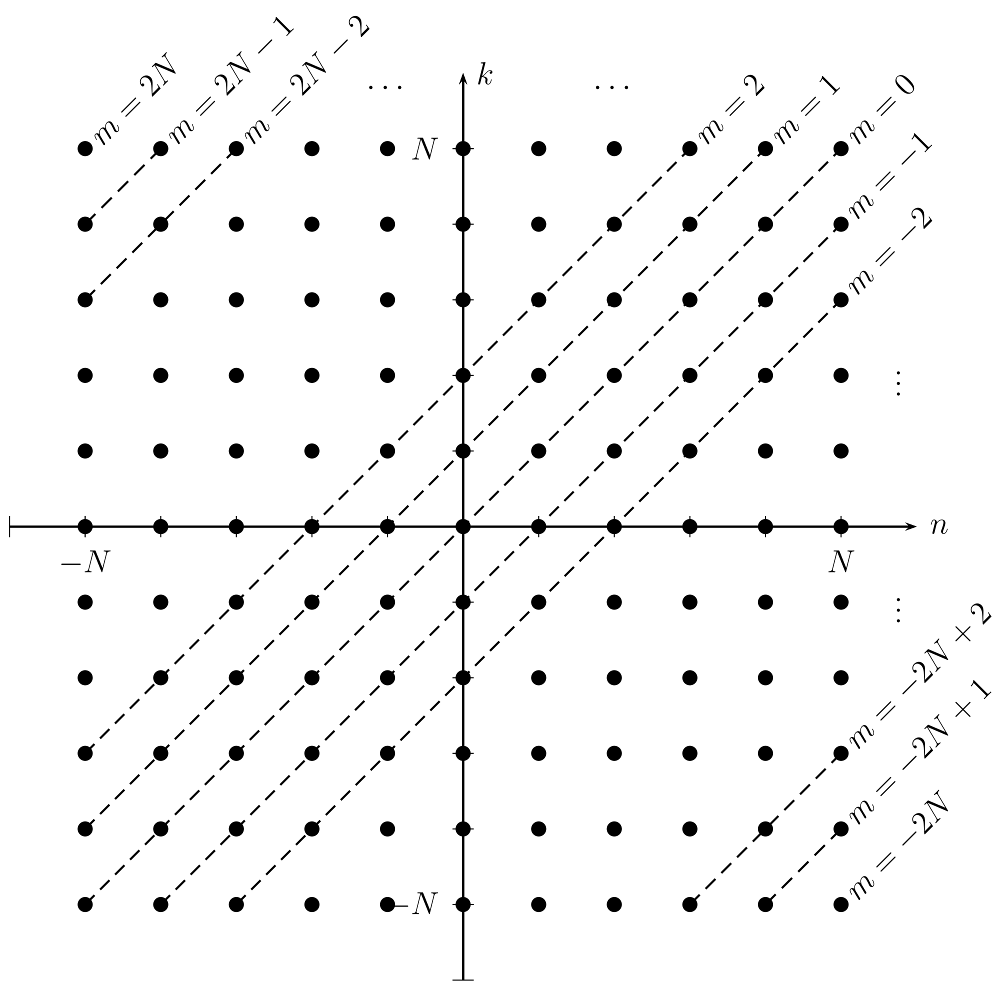
b) Aikakeskiarvo on odotusarvon harhaton estimaattori aina kun $X[n]$ on stationaarinen:

$$E[Y_N] = E\left\{\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} X[n]\right\} = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} E\{X[n]\} = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\mu = \mu.$$

Tarkentuvuus: tarkastellaan aluksi signaalin $\tilde{X}[n] = X[n] - \mu$ aikakeskiarvoa $\tilde{Y}_N$. Kuten (a)-kohdassa

$$E[\tilde{Y}_N^2] = \frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N} \underbrace{E[\tilde{X}[n]\tilde{X}[k]]}_{R_{\tilde{X}}[k-n]}.$$

Merkitään $m = k - n$. Geometrisella tarkastelulla



$$E[\tilde{Y}_N^2] = \frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{m=-2N}^{2N}(2N+1-|m|)R_X[m] = \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-2N}^{2N}(1-\frac{|m|}{2N+1})R_X[m]$$

Nyt

$$\begin{aligned} E\{(Y_N-\mu)^2\} = E[\tilde{Y}_N^2] &= \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-2N}^{2N}(1-\frac{|m|}{2N+1})R_{\tilde{X}}[m] \\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-2N}^{2N}(1-\frac{|m|}{2N+1})C_X[m], \end{aligned}$$

missä $C_X[m]$ on signaalin $X[n]$ autokovarianssifunktio $E[(X[n]-\mu)(X[n+m]-\mu)] = R_X[m]-\mu^2$. Aikakeskiarvo Y_N on odotusarvon μ tarkentuva estimaattori, jos

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{m=-2N}^{2N}(1-\frac{|m|}{2N+1})C_X[m] \to 0,\ N \to \infty.$$