Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 5 syksy 2023

1. (**e**) Esitehtävä: vastaukset Moodlessa

2. (**e**) Esitehtävä: vastaukset Moodlessa

3. (**p**) Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomat ja noudattavat standardisoitua normaalijakaumaa $N(0,1)$.

   a) Mikä on muuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio $f(x,y)$?

   b) Mikä on muuttujien X ja Y:n kovarianssimatriisi $C_{X,Y}$?

   c) Muodostetaan uudet muuttujat U ja V muunnoksella $U = X - 2Y$ ja $V = 2X + Y$. Mikä on muuttujien U ja V yhteisjakauman tiheysfunktio $h(u,v)$? Ovatko U ja V riippumattomat?

   d) Mikä on muuttujien U ja V kovarianssimatriisi?

   <u>Ratkaisu</u>

   a) Normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}},$$

   missä μ on odotusarvo ja σ^2 varianssi. Nyt siis $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ja $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$. Koska X ja Y ovat riippumattomat, on yhteisjakauman tiheysfunktio

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

   b) Riippumattomat satunnaismuuttujat ovat korreloimattomat (ei välttämättä toisin päin). Niinpä $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ ja kovarianssimatriisi on

$$C_{X,Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}\, X & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(Y,X) & \mathrm{Var}\, Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   c) Muunnos matriisimuodossa $\left[\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right] = A \left[\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right]$:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

   Jacobin determinantti

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 5$$

Uusien muuttujien U ja V tiheysfunktio on

$$\begin{aligned}
h(u,v) &= \frac{1}{|J|} f(x(u,v), y(u,v)) = \frac{1}{5} f(\frac{u+2v}{5}, \frac{-2u+v}{5}) \\
&= \frac{1}{5}\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[(\frac{u+2v}{5})^2 + (\frac{-2u+v}{5})^2]} \\
&= \frac{1}{10\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{u^2+4uv+4v^2}{25} + \frac{4u^2-4uv+v^2}{25}\right]} \\
&= \frac{1}{10\pi} e^{-\frac{1}{10}(u^2+v^2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{5}} \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{v^2}{5}} = h_U(u) h_V(v).
\end{aligned}$$

Koska $h(u,v) = h_U(u)h_V(v)$, U ja V ovat riippumattomat.

d) Koska U ja V ovat riippumattomat, $\mathrm{Cov}(U,V) = 0$. U:n ja V:n tiheysfunktioista $\mathrm{Var}\, U = \mathrm{Var}\, V = 5$, joten

$$C_{U,V} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Toinen tapa:

$$C_{U,V} = AC_{X,Y}A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. (**p**) Satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssimatriisi on

$$\begin{pmatrix} 3.7 & 0.9 \\ 0.9 & 1.3 \end{pmatrix}.$$

Muodosta X:stä ja Y:stä lineaarisella muunnoksella uudet muuttujat U ja V, jotka ovat korreloimattomia. Mikä on uusien muuttujien kovarianssimatriisi?

Ratkaisu

Muodostetaan lineaarisella muunnoksella $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ korreloimattomat satunnaismuuttujat U ja V (eli $\mathrm{Cov}(U,V) = 0$)

$$C_{(U,V)} = AC_{(X,Y)}A^T = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix}.$$

Matriisi A muodostetaan riveittäin $C_{(X,Y)}$:n ominaisvektoreista. Ominaisarvot λ saadaan yhtälöstä $\det(C_{(X,Y)} - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3.7-\lambda & 0.9 \\ 0.9 & 1.3-\lambda \end{vmatrix} = (3.7-\lambda)(1.3-\lambda) - 0.81 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}.$$

Ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $\left(C_{(X,Y)} - \lambda I\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{\lambda = 1:} \qquad \begin{pmatrix} 2.7 & 0.9 \\ 0.9 & 0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = -3a, \quad \text{valitaan } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda = 4:} \qquad \begin{pmatrix} -0.3 & 0.9 \\ 0.9 & -2.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 3b, \quad \text{valitaan } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lineaarisen muunnoksen matriisi

$$A = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uudet korreloimattomat muuttujat

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} X - 3Y \\ 3X + Y \end{pmatrix}.$$

Nyt: $C_{(U,V)} = AC_{(X,Y)}A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ eli $\mathrm{Cov}(U,V) = 0$. Lisäksi $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 5 = \sigma_U^2 + \sigma_V^2$.

Huomio 1. $\sigma_U^2 = \lambda_1$, $\sigma_V^2 = \lambda_2$.

Huomio 2. Jos valitaan muunnosmatriisin riveiksi normittamattomat ominaisvektorit, kokonaisvarianssi ei pysy samana. Esim. muunnosmatriisilla $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ saadaan $\sigma_U^2 + \sigma_V^2 = 50$.

5. (**n**) Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia ja noudattavat eksponenttijakaumaa Exp (1), jolloin $f_X(x) = e^{-x}u(x)$, $f_Y(y) = e^{-y}u(y)$.

a) Mikä on yhteisjakauman tiheysfunktio $f_{X,Y}(x,y)$?

b) Muodostetaan uudet satunnaismuuttujat Z ja W lineaarisella muunnoksella

$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X + Y \end{pmatrix}.$$

Määrää muuttujien Z ja W yhteisjakauman tiheysfunktio $h_{Z,W}(z,w)$.

c) Määrää integroimalla satunnaismuuttujan W reunajakauman tiheysfunktio $h_W(w)$.

d) Hoksaatko tästä, mikä on summan $W = X + Y$ tiheysfunktio yleisesti, kun X ja Y ovat riippumattomia ja niiden tiheysfunktiot ovat $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$? Vinkki: tutki integraalia

$$h_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{Z,W}(z,w)dz$$

b)-kohdan lineaarisen muunnoksen jälkeen.

<u>Ratkaisu</u>

a) Reunajakaumien tiheysfunktiot ovat $f_X(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{u}(x)$ ja $f_Y(y) = \mathrm{e}^{-y}\mathrm{u}(y)$. Koska satunnaismuuttujat ovat riippumattomia, niin $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{u}(x)\,\mathrm{e}^{-y}\mathrm{u}(y)$.

b) Lineaarinen muunnos

$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ -Z+W \end{pmatrix},$$

ja Jacobin determinantti on $J = \frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Muuttujien Z ja W yhteisjakauman tiheysfunktio on siis

$$h_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(z,-z+w)\frac{1}{|J|} = \mathrm{e}^{-z}\mathrm{u}(z)\,\mathrm{e}^{-(w-z)}\mathrm{u}(w-z) = \mathrm{e}^{-w}\mathrm{u}(z)\mathrm{u}(w-z).$$

c) Muuttujan W reunajakauma

$$h_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{Z,W}(z,w)\mathrm{d}z = \begin{cases} \int_0^w \mathrm{e}^{-w}\mathrm{d}z = w\,\mathrm{e}^{-w}, & w \geq 0 \\ 0, & w < 0 \end{cases} = w\,\mathrm{e}^{-w}\mathrm{u}(w).$$

(Gamma$(2,1)$-jakauma)

d) Edellisen perusteella yleisesti jos X ja Y ovat riippumattomat, $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ sekä $Z = X$ ja $W = X+Y$, niin

$$h_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{Z,W}(z,w)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z,-z+w)\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z)f_Y(w-z)\,dz$$

eli $h_{X+Y} = f_X * f_Y$.

6. (**n**) Satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot ovat $\mu_X = 2$ ja $\mu_Y = -1$ sekä varianssit $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 5$. Korrelaatiokerroin on $\rho_{X,Y} = \frac{4}{5}$. Muodostetaan uudet muuttujat $U = X + 2Y$ ja $V = 2X - Y$. Määrää

a) $E(U)$ ja $E(V)$

b) Kovarianssimatriisit $C_{X,Y}$ ja $C_{U,V}$ sekä korrelaatiokerroin $\rho_{U,V}$

c) Millä lineaarisella muunnoksella olisi saatu korreloimattomat muuttujat U ja V?

<u>Ratkaisu</u>

a)

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E(U) \\ E(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Kovarianssi $\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_X\sigma_Y\rho(X,Y) = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{4}{5} = 4$, joten

$$C_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Siispä

$$C_{(U,V)} = AC_{(X,Y)}A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix},$$

eli $D^2(U) = 41,\ D^2(V) = 9, \mathrm{Cov}(U,V) = 12$ sekä $\rho(U,V) = \frac{12}{\sqrt{41}\sqrt{9}} \approx 0.6247.$

c) Kovarianssimatriisin $C_{(X,Y)}$ ominaisarvot:

$$\det(C_{(X,Y)} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 1$. Ominaisvektorit:

$$\lambda_1 = 9: \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow a = b,\ \text{valitaan } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1: \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow a = -b,\ \text{valitaan } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kysytty muunnosmatriisi on esim.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$