Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 4 syksy 2023

1. **(e)** Esitehtävä: vastaukset Moodlessa

2. **(e)** Esitehtävä: vastaukset Moodlessa

3. **(p)** Kuvan 1 RC-piiri toteuttaa differentiaaliyhtälön

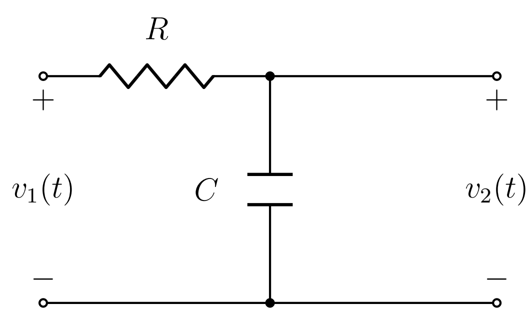
$$v_2'(t) + \frac{1}{RC}v_2(t) = \frac{1}{RC}v_1(t),$$

missä jännite $v_1(t)$ on heräte ja jännite $v_2(t)$ on vaste.

a) Määrää piirin taajuusvastefunktio ja impulssivaste. Onko systeemi yli-, ali- vai kaistanpäästösuodatin?

b) Miten vakio RC on valittava, jotta taajuudella 50 Hz esiintyvän sinimuotoisen häiriön amplitudi pienenisi sadasosaan?

Kuva 1



<u>Ratkaisu</u> Merkitään $\frac{1}{RC} = a$.

a) Fourier-muunnetaan differentiaaliyhtälö:

$$\begin{aligned} i2\pi f Y(f) + aY(f) &= aX(f) \\ \Leftrightarrow (a + i2\pi f)Y(f) &= aX(f) \\ \Leftrightarrow \quad Y(f) &= \frac{a}{a + i2\pi f}X(f) \end{aligned}$$

taajuusvastefunktio

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{a}{a + i2\pi f} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + i2\pi f}.$$

Impulssivaste:

$$h(t) = a\,\mathrm{e}^{-at}u(t) = \frac{1}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}u(t).$$

Amplitudivaste:

$$|H(f)| = \frac{a}{|a + i2\pi f|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

Matalat taajuudet pääsevät läpi, $|H(0)| = 1$, joten kyseessä on alipäästösuodatin.

b) Heräte $x(t) = \sin(2\pi \cdot 50t)$ aiheuttaa vasteen $y(t) = |H(50)| \sin(2\pi \cdot 50t + \theta(50))$, joten vakio voidaan ratkaista yhtälöstä $|H(50)| = \frac{1}{100}$. Saadaan

$$\begin{aligned}
|H(50)| &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 \cdot 50^2}} = \frac{1}{100} \qquad | \, (\cdot)^2 \\
\Leftrightarrow 10000a^2 &= a^2 + 10000\pi^2 \\
\Leftrightarrow 9999a^2 &= 10000\pi^2 \\
\Leftrightarrow a^2 &= \frac{10000\pi^2}{9999}.
\end{aligned}$$

Positiivinen juuri on

$$a = \frac{100\pi}{3\sqrt{1111}}$$

joten kysytty aikavakio on

$$RC = \frac{3\sqrt{1111}}{100\pi} \approx 0.3183.$$

4. (**p**) Kuvan 2 kausaalisen systeemin siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{M}{1 - az^{-1}},$$

missä M ja a ovat reaalilukuja.

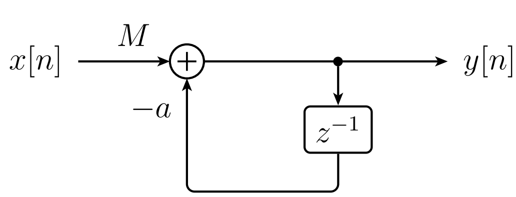
a) Millä a:n arvoilla systeemi on stabiili?

b) Suunnitellaan stabiili alipäästösuodatin: määrää aluksi järjestelmän amplitudivaste $|H(\omega)|$.

c) Määrää vakio M vakion a lausekkeena ehdosta $H(\omega) = 1$, kun $\omega = 0$.

d) Ratkaise a ehdosta $|H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, kun $\omega_c = \frac{\pi}{3}$. (Tässä ω_c on päästökaistan leveyttä kuvaava ns. -3 dB:n rajataajuus.)

Kuva 2



Ratkaisu

a) $H(z) = \frac{M}{1-az^{-1}} = \frac{Mz}{z-a}$. Ainut napa (nimittäjän nollakohta) $z = a$. Kausaalinen systeemi, jonka siirtofunktio on rationaalinen, on stabiili jos ja vain jos kaikki navat ovat kompleksitason yksikköympyrän sisällä. Tehtävän syteemi on siis stabiili, jos $|a| < 1$.

b) Taajuusvastefunktio

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{i\omega}} = \frac{M}{1 - ae^{-i\omega}}$$

Amplitudivaste

$$|H(\omega)| = \frac{|M|}{|1 - ae^{-i\omega}|} = \frac{|M|}{\sqrt{(1 - a\cos\omega)^2 + (a\sin\omega)^2}} = \frac{|M|}{\sqrt{1 - 2a\cos\omega + a^2}}$$

c)

$$H(0) = \frac{M}{1 - ae^{-i0}} = \frac{M}{1-a} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad M = 1 - a$$

,

d)

$$|H(\frac{\pi}{3})| = |\frac{1-a}{1 - 2a\cos\frac{\pi}{3} + a^2}| = \frac{1-a}{\sqrt{1 - a + a^2}}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} |H(\frac{\pi}{3})| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}(1-a) &= \sqrt{1 - a + a^2} \qquad | \, (\cdot)^2 \\ \Rightarrow \quad 2(1 - 2a + a^2) &= 1 - a + a^2 \\ \Leftrightarrow \quad a^2 - 3a + 1 &= 0 \\ a &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Koska $|a| < 1$, vain $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.3820$ käy. Saadaan

$$H(z) = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}z^{-1}}.$$

5. (**n**) Olkoon $m(t) = \mathrm{sinc}(t)$. Laske ja piirrä SSB-moduloidun signaalin

$$x(t) = m(t)\cos 2\pi f_c t - \hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t$$

amplitudispektri, kun $f_c = 10$ Hz.

Ratkaisu.

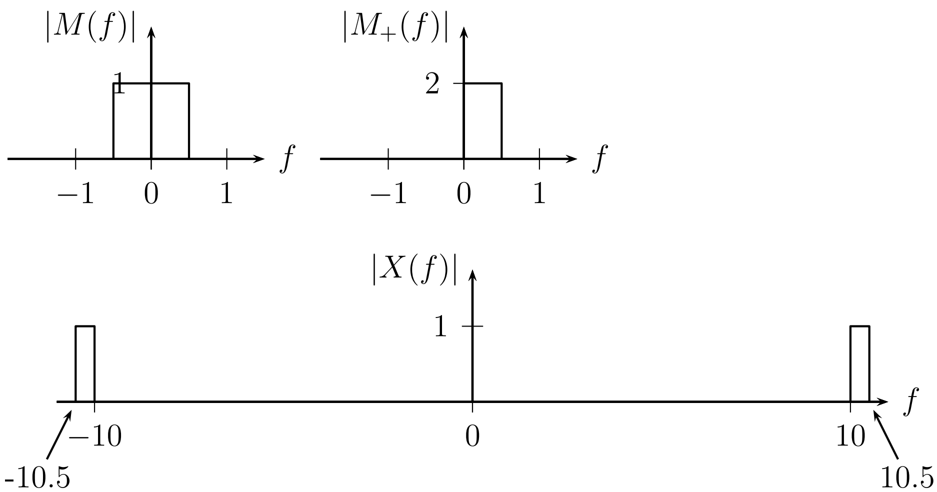
$M(f) = \mathrm{rect}(f)$, $M_+(f) = 2\,\mathrm{rect}(\frac{f-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}})$. Luennoista

$$\begin{aligned} x_u(t) &= m(t)\cos 2\pi f_c t - \hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t \\ &= \frac{1}{2}[m_+(t)e^{i2\pi f_c t} + \overline{m_+(t)e^{i2\pi f_c t}}] \end{aligned}$$

josta kaavalla A10

$$
\begin{aligned}
X_u(f) &= \frac{1}{2}[M_+(f-f_c) + \overline{M_+(-f-f_c)}] \\
\Rightarrow |X_u(f)| &= \frac{1}{2}|M_+(f-f_c)| + \frac{1}{2}|M_+(-f-f_c)| \\
&= \mathrm{rect}(\frac{f-10-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}) + \mathrm{rect}(\frac{-f-10-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}) \\
&= \mathrm{rect}(\frac{f-10.25}{0.5}) + \mathrm{rect}(\frac{f+10.25}{0.5}).
\end{aligned}
$$

(Viimeinen yhtälö suorakaidefunktion parillisuuden nojalla.) Amplitudispektrit:



6. (**n**) Analogisen LTI-systeemi on määritelty differentiaaliyhtälöllä

$$y'(t) + 8y(t) = 3x(t-4),$$

missä $x(t)$ on heräte ja $y(t)$ on vaste. Määrää taajuusvastefunktio, amplitudivaste, vaihevaste ja impulssivaste.

<u>Ratkaisu</u>
Fourier-muunnetaan differentiaaliyhtälö:

$$\Rightarrow \quad i2\pi f Y(f) + 8Y(f) = 3X(f)\,\mathrm{e}^{-i2\pi f\cdot 4}$$

$$\Rightarrow \text{ taajuusvastefunktio} \quad H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{3\,\mathrm{e}^{-i8\pi f}}{8+i2\pi f}$$

$$\text{amplitudivaste} \quad |H(f)| = \frac{|3\,\mathrm{e}^{-i8\pi f}|}{|8+i2\pi f|} = \frac{3}{\sqrt{64+4\pi^2 f^2}}$$

$$\text{vaihevaste} \quad \theta(f) = \arg H(f) = -8\pi f - \overline{\mathrm{arc}}\tan(\frac{\pi f}{4})$$

$$\text{impulssivaste} \quad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = 3\,\mathrm{e}^{-8(t-4)}u(t-4)$$