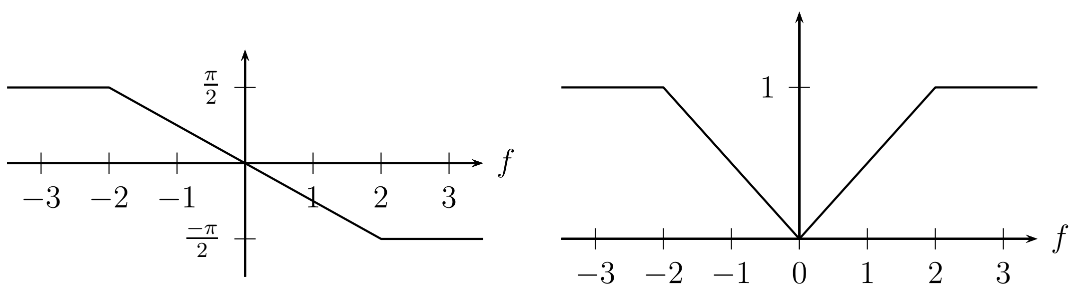
Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 3 syksy 2023

1. **(e)** Esitehtävä: vastaukset Moodlessa

2. **(e)** Esitehtävä: vastaukset Moodlessa

3. **(p)** LTI-systeemin impulssivaste on reaalinen, ja amplitudivaste sekä vaihevaste on esitetty alla olevassa kuvassa. Päättele kumpi kuvista on kumpi. Mitkä taajuudet eivät pääse läpi? Mitkä taajuudet pääsevät läpi muuttumatta? Määrää systeemin vaste herätteeseen $x(t) = \sin(\pi t + \frac{\pi}{4}) + 2\cos(2\pi t - \frac{\pi}{3})$.



Ratkaisu

Reaalisen signaalin amplitudispektri on parillinen ja vaihespektri pariton:

$$|X(-f)| = |X(f)|$$
$$\arg X(-f) = -\arg X(f)$$

Ensimmäinen kuvaaja on pariton, joten kyseessä on vaihespektri. Toinen kuvaaja on parillinen, joten kyseessä on amplitudispektri.

LTI-systeemin vasteen Fourier-muunnos on

$$Y(f) = H(f)X(f),$$

missä $X(f)$ on herätteen Fourier-muunnos ja $H(f)$ taajuusvastefunktio. Taajuudet, joilla $|H(f)| = 0$, eivät pääse läpi, tässä tapauksessa vain taajuus $f = 0$. Taajuudet, joilla $H(f) = |H(f)|e^{i\theta(f)} = 1$, pääsevät läpi muuttumatta. Tässä tapauksessa $\theta(f) \neq 0$ aina kun $|H(f)| = 1$, joten kaikki taajuudet muuttuvat ainakin vaihesiirron verran.

Termin $\sin(\pi t + \frac{\pi}{4})$ taajuus on $\frac{1}{2}$. Kuvista nähdään, että $|H(\frac{1}{2})| = \frac{1}{4}$, $\theta(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{8}$, joten vaste tähän termiin on

$$|H(\frac{1}{2})| \sin(\pi t + \frac{\pi}{4} + \theta(\frac{1}{2})) = \frac{1}{4}\sin(\pi t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{4}\sin(\pi t + \frac{\pi}{8}).$$

Vastaavasti termin $2\cos(2\pi t - \frac{\pi}{3})$ taajuus on 1 ja $|H(1)| = \frac{1}{2}$, $\theta(1) = -\frac{\pi}{4}$, joten vaste on

$$\frac{1}{2} \cdot 2\cos(2\pi t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos(2\pi t - \frac{7\pi}{12}).$$

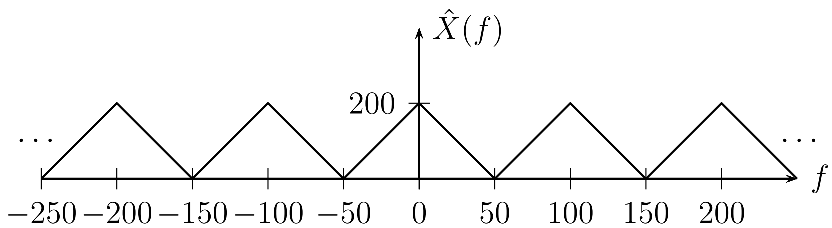
Systeemin lineaarisuuden nojalla vaste koko signaaliin $x(t)$ on $\frac{1}{4}\sin(\pi t + \frac{\pi}{8}) + \cos(2\pi t - \frac{7\pi}{12})$.

4. **(p)** Olkoon signaali $x(t)$ näytteistetty Nyquistin taajuudella $f_N = 100$ Hz, jolloin on saatu näytejono $\hat{x}(t)$ (Fourier-muunnos kuvassa).

a) Piirrä on alkuperäisen signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos.

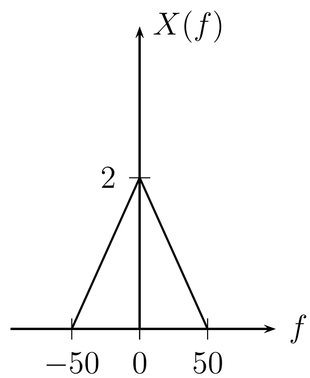
b) Määrää lineaarinen aikainvariantti systeemi, jonka vaste signaaliin $\hat{x}(t)$ on alkuperäinen signaali $x(t)$. Anna systeemin taajuusvastefunktio ja impulssivaste.

c) Onko systeemi kausaalinen?



Ratkaisu

a) $\hat{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{n}{T}) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$. Koska Nyquistin taajuus on $f_N = 100$ Hz, signaalissa $x(t)$ ei ole 50 Hz suurempia taajuuksia. Alkuperäisen signaalin Fourier-muunnos oli siis keskimmäinen kolmio jaettuna 100:lla.



b) On löydettävä taajuusvastefunktio $H(f)$ joka toteuttaa yhtälön

$$X(f) = H(f)\hat{X}(f) \quad \Rightarrow H(f) = \frac{X(f)}{\hat{X}(f)}, \text{ kun } \hat{X}(f) \neq 0.$$

Selvästi ainoa ratkaisu on

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & -50 \leq f \leq 50 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \qquad = \frac{1}{100}\,\text{rect}(\frac{f}{100})$$

Kaavan B2 nojalla vastaava impulssivaste on $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \text{sinc}(100t)$.

c) Systeemi on kausaalinen, jos $h(t) = 0$, kun $t < 0$. sinc-funktio on parillinen, joten tämä systeemi ei ole kausaalinen.

5. **(n)** Olkoon aikadiskreetit signaalit $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 0, 0\}$ ja $y[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, -1, 0, 0\}$.

a) Sykliselle konvoluutiolle ja diskreetille Fourier-muunnokselle (DFT) pätee $x[n] \circledast y[n] \leftrightharpoons X[k]Y[k]$. Laske DFT:n avulla $x[n] \circledast y[n]$:

1° Laske 4 pisteen DFT:t $X[k]$ ja $Y[k]$, $k = 0, 1, 2, 3$.

2° laske käänteismuunnos tulolle $X[k]Y[k]$.

b) Laske aikadiskreetti Fourier-muunnos (DTFT) $X(\omega)$ signaalille $x[n]$. Mikä yhteys DFT:llä ja DTFT:llä on?

Ratkaisu

a) Olkoon $z[n] = x[n] \circledast y[n] \;\Rightarrow\; Z[k] = X[k]Y[k]$.

$$\begin{aligned}
&X[0] = 1 + 1 = 2 && Y[0] = 1 - 1 = 0 && Z[0] = 2 \cdot 0 = 0 \\
&X[1] = 1 - i && Y[1] = 1 - (-i) = 1 + i && Z[1] = (1 - i)(1 + i) = 2 \\
&X[2] = 1 - 1 = 0 && Y[2] = 1 - (-1) = 2 && Z[0] = 0 \cdot 2 = 0 \\
&X[3] = \overline{X[1]} = 1 + i && Y[3] = \overline{Y[1]} = 1 - i && Z[3] = (1 + i)(1 - i) = 2
\end{aligned}$$

IDFT: $x[n] = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{3} X[k] e^{i2\pi \frac{kn}{N}} = \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{k=0}^{3} X[k] e^{i\frac{\pi}{2}kn}$

$$\begin{aligned}
z[0] &= \frac{1}{4}(0 + 2 + 0 + 2) = 1 \\
z[1] &= \frac{1}{4}(0 + 2i - 0 - 2i) = 0 \\
z[2] &= \frac{1}{4}(0 - 2 + 0 - 2) = -1 \\
z[3] &= \frac{1}{4}(0 - 2i - 0 + 2i) = 0
\end{aligned}$$

b) $X(\omega) = 1 + e^{-i\omega}$. Vertaamalla kaavoja H11 ja H13 $X[k] = X(\omega)|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = X(\omega)|_{\omega = \frac{\pi}{2}k}$.

6. **(n)** Tuottaja N.N. lisää vokalistin ääniraidalle kaikuefektin, joka on LTI-systeemi. Systeemin impulssivaste on $h(t) = \delta(t) + \delta(t-2)$ (aikayksikkö valittu sopivasti).

a) Määrää systeemin taajuusvastefunktio, amplitudivaste ja vaihevaste.

b) Solisti Signe Wave laulaa todella puhtaasti, kappaleen huippukohdassa hänen äänensä noudattaa puhdasta siniaaltoa $x(t) = \sin(\frac{5\pi t}{2})$. Mikä signaali tulee tällöin kaikulaitteesta ulos? Entäpä kun hän laulaa oktaavia korkeammalta, jolloin taajuus kaksinkertaistuu?

Ratkaisu.

a) Taajuusvastefunktio

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = 1 + e^{-i2\pi f\cdot 2} = e^{-i2\pi f}(e^{i2\pi f} + e^{-i2\pi f}) = e^{-i2\pi f}2\cos(2\pi f).$$

Amplitudivaste

$$|H(f)| = |2\cos(2\pi f)|$$

Vaihevaste

$$\theta(f) = \arg H(f) = \arg e^{-i2\pi f} + \arg 2\cos(2\pi f) = \begin{cases} -2\pi f, & \text{kun } \cos 2\pi f > 0 \\ -2\pi f + \pi, & \text{kun} \cos 2\pi f < 0. \end{cases}$$

b) $x(t) = \sin(2\pi\frac{5}{4}t)$, joten taajuus on $\frac{5}{4}$. Silloin vaste herätteeseen $\sin\frac{5\pi}{2}t$ on

$$y(t) = |H(\frac{5}{4})|\sin(\frac{5\pi}{2}t + \theta(\frac{5}{4})) = 0,$$

koska $|H(\frac{5}{4})| = |2\cos 2\pi\frac{5}{4}| = 2\cos\frac{5\pi}{2} = 0$. Jos taajuus on $\frac{5}{2}$ ja $x(t) = \cos(5\pi t)$, niin

$$|H(\frac{5}{2})| = |2\cos 2\pi\frac{5}{2}| = |2\cdot(-1)| = 2$$
$$\theta(\frac{5}{2}) = -2\pi\frac{5}{2} + \pi = -4\pi$$

joten $y(t) = 2\sin(5\pi t - 4\pi) = 2\sin(5\pi t)$.