Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 2 syksy 2023

1. (**e**) Esitehtävä: Vastaukset stackissa

2. (**e**) Esitehtävä: Vastaukset stackissa

3. (**p**) Tässä tehtävässä voit unohtaa huolet sarjojen suppenemisesta, sillä eivät ne kuitenkaan suppene perinteisessä mielessä. Älä vaivaa päätäsi myöskään epäjatkuvuuspisteillä, sillä nyt vedetään mutkat suoriksi. Voit käyttää kaavakokoelman soveltuvia kaavoja paitsi kaavaa B17, jonka johdamme kohdassa (b). (Huomaa myös kaava G6).

   a) Näytteenottofunktio $\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ on T-jaksollinen. Määrää sen kompleksinen Fourierin sarja
   $$\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}, \quad d_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \Delta(t) e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}\,\mathrm{d}t.$$

   b) Käyttäen hyväksi (a)-kohtaa johda kaavakokoelman kaava B17, eli määrää näytteenottofunktion $\Delta(t)$ Fourier-muunnos.

   c) Olkoon signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos $X(f)$. Määrää näytejonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t)$ Fourier-muunnos $X(f)$:n avulla.

   <u>Ratkaisu</u>

   a)
   $$\begin{aligned}
   d_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \Delta(t) e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}\,\mathrm{d}t \\
   &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}\,\mathrm{d}t \\
   &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}\,\mathrm{d}t \\
   &= \frac{1}{T} e^{-i\frac{2\pi n}{T}\cdot 0} \\
   &= \frac{1}{T}
   \end{aligned}$$

   joten
   $$x(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\frac{n}{T}t}.$$

   b) Kaavan B11 nojalla
   $$\mathcal{F}\{e^{i2\pi\frac{n}{T}t}\} = \delta(f - \frac{n}{T})$$

joten

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\Delta(t)\} &= \mathcal{F}\{\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\frac{n}{T}t}\} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{i2\pi\frac{n}{T}t}\} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-\frac{n}{T}).\end{aligned}$$

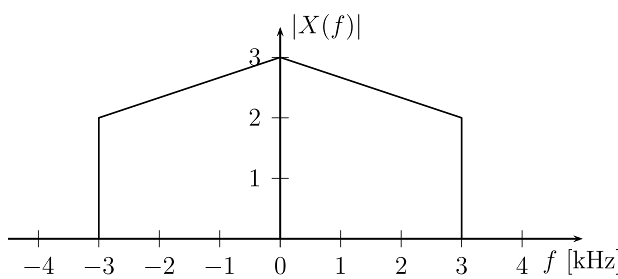
c) Kaavan A11 mukaisesti

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\Delta(t)\} &= X(f) * \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-\frac{n}{T}) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f-\frac{n}{T}) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-\frac{n}{T})\end{aligned}$$

4. (**p**) Parillisen analogiasignaalin $x(t)$ amplitudispektri on kuvion mukainen. Piirrä $x(t)$:stä otetun näytejonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ amplitudispektri, kun näytteenottoväli on

(a) $T = 0.125$ ms (b) $T = 0.25$ ms.

Tapahtuuko kohdissa (a) ja (b) laskostumista? Mikä on signaaliin liittyvä kriittinen näytteenottotaajuus eli ns. Nyquistin taajuus?



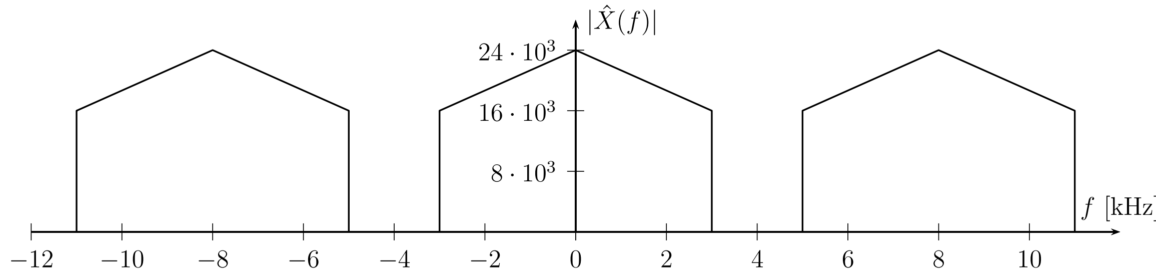
Ratkaisu

Näytteenotossa signaali $x(t)$ kerrotaan impulssijonolla $\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$,

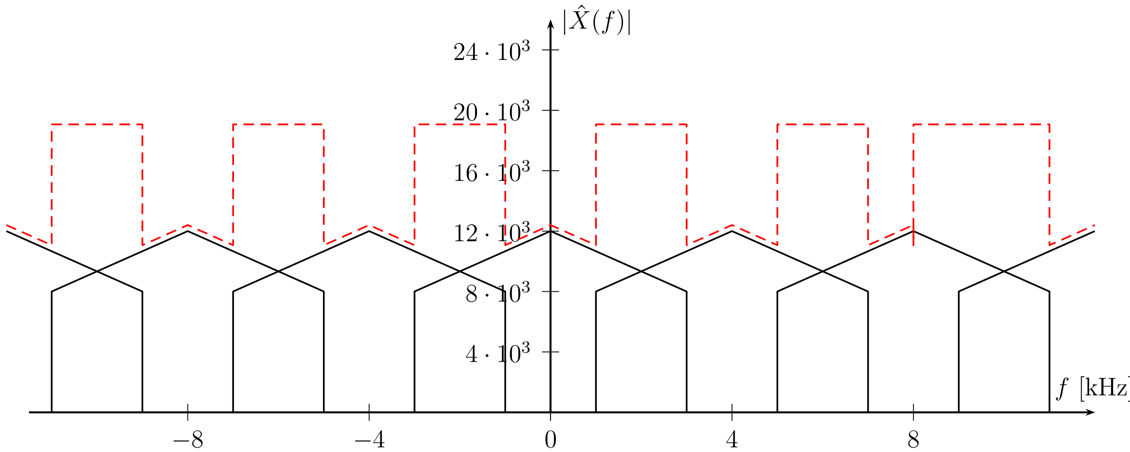
$$\hat{x}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-kT),$$

missä T on näytteenottoväli. 3.(c)-kohdan perusteella saadaan kuvat

a) $T = 0.125$ ms $\Rightarrow f_s = 8$ kHz. $\hat{X}(f) = 8\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-8n)$



b) $T = 0.25$ ms $\Rightarrow \quad f_s = 4$ kHz. $\hat{X}(f) = 4\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-4n)$



Parillisen signaalin Fourier-muunnos on reaalinen ja parillinen, joten päällekkäin menevät osat ovat saman merkkisiä ja summautuvat amplitudispektrissä.

Tässä Nyquistin taajuus on

$$f_s = 2f_c = 6 \text{ kHz},$$

mihin korkein taajuuskomponentti $f_c = 3$ kHz luetaan $x(t)$:n amplitudispektristä.

5. (**n**) Olkoon $x(t) = \text{sinc}(2t)\cos(6\pi t)$, missä t on aika sekunteina. Piirrä kuva näytejonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t)$ amplitudispektristä $|\hat{X}(f)|$, kun signaali näytteistetään taajuudella

a) $f_s = 5$ Hz

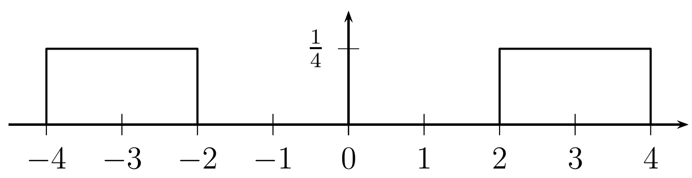
b) $f_s = 10$ Hz.

Tapahtuuko laskostumista? Voidaanko signaali rekonstruoida näytteistään?

Ratkaisu Lasketaan amplitudispektri: kaavakokoelman avulla

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{2}\text{rect}(\frac{f}{2}) * \frac{1}{2}[\delta(f-3) + \delta(f+3)] \\ &= \frac{1}{4}\text{rect}(\frac{f-3}{2}) + \frac{1}{4}\text{rect}(\frac{f+3}{2}) \end{aligned}$$

Amplitudispektrin $|X(f)|$ kuvaaja:



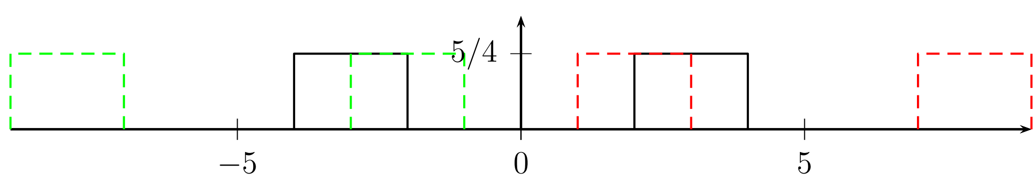
Näytejonon

$$\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$$

Fourier-muunnos on

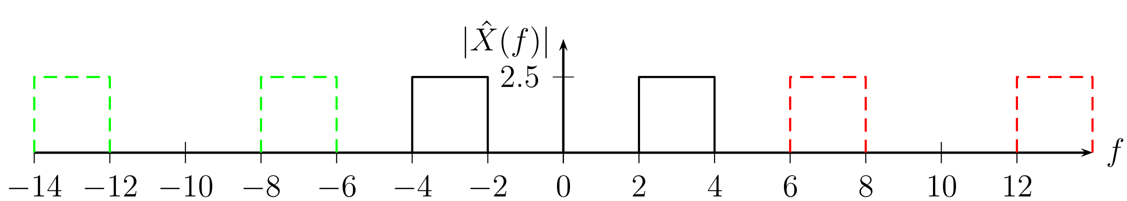
$$\hat{X}(f) = X(f) * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f - \frac{k}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f - \frac{k}{T})$$

a) $T = \frac{1}{5}$ s
Näytejonon amplitudispektri:



Alueelle $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}] = [-2.5, 2.5]$ laskostuu kopioita, jotka menevät päällekkäin. Signaalia ei voi rekonstruoida näytteistään)

b) $T = \frac{1}{10}$ s
Näytejonon amplitudispektri:



Alueelle $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}] = [-5, 5]$ ei laskostu kopioita. Signaali voidaan rekonstruoida näytteistä.

6. (**n**) Laske Fourier-muunnoksen avulla signaalin $x(t) = \mathrm{e}^{-2t}u(t)$ autokorrelaatiofunktio $r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{x(t)}x(t+\tau)\,dt$.

<u>Ratkaisu</u>

Koska

$$\begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty}\overline{x(t)}x(t+\tau)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)x(\tau-(-t))\mathrm{d}t \\ &= x(\tau) * x(-\tau), \end{aligned}$$

niin kaavan A12 avulla voidaan autokorrelaatiofunktio ratkaista Fourier-muunnoksilla:

$$\mathcal{F}\{x(\tau) * x(-\tau)\} = \mathcal{F}\{x(\tau)\} \cdot \mathcal{F}\{x(-\tau)\},$$

jossa kaavan B3 avulla

$$\mathcal{F}\{x(\tau)\} = \mathcal{F}\{\,\mathrm{e}^{-2\tau}u(\tau)\} = \frac{1}{2 + i2\pi f}$$

ja edelleen kaavan A2 avulla

$$\mathcal{F}\{x(-\tau)\} = \frac{1}{2 - i2\pi f}.$$

Siten

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(-\tau)\} \cdot \mathcal{F}\{x(\tau)\} &= \frac{1}{2 + i2\pi f} \cdot \frac{1}{2 - i2\pi f} = \frac{1}{2^2 + (2\pi f)^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2^2 + (2\pi f)^2},\end{aligned}$$

josta käänteismuunnoksella (kaava B4) saadaan

$$r_{xx}(\tau) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2|\tau|}.$$