Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 1 syksy 2023

1. (**e**) Esitehtävä: Vastaukset stackissa

2. (**e**) Esitehtävä: Vastaukset stackissa

3. (**p**) Määritellään diskreetit signaalit: $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1+i}, 2, 3i\}$, $y[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1-i, -2i, 3\}$

   a) Laske autokorrelaatio $r_{xx}[l]$ sekä signaalien energiat E_x ja E_y.

   b) Laske ristikorrelaatio $r_{xy}[l]$. Millä viiveen l arvolla ristikorrelaation itseisarvo on suurin? Mikä tämä arvo on?

<u>Ratkaisu</u>

Lasketaan autokorrelaatio

$$r_{xx}[n] = \overline{x[-n]} * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{x[k]}x[k+n]$$

ja ristikorrelaatio

$$r_{xy}[n] = \overline{x[-n]} * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{x[k]}y[k+n]$$

alekkainkertolaskulla, siten että

1° jos summa tai tulo ≥ 10 niin sitä ei merkitä muistiin

2° nollaindeksin paikka $\uparrow$ määrätään kuten desimaalipilkun paikka

a) $r_{xx}[l] = \overline{x[-n]} * x[n] = \{-3i, 2, \underset{\uparrow}{1-i}\} * \{\underset{\uparrow}{1+i}, 2, 3i\} = \{3-3i, 2-4i, \underset{\uparrow}{15}, 2+4i, 3+3i\}$,
$E_x = r_{xx}[0] = 15$.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & -3i & 2 & 1-i \\
 & & 1+i & 2 & 3i \\
\cline{2-5}
 & & 9 & 6i & 3+3i \\
 & -6i & 4 & 2-2i & \\
3-3i & 2+2i & 2 & & \\
\hline
3-3i & 2-4i & 15 & 2+4i & 3+3i
\end{array}$$

$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = |0|^2 + |1-i|^2 + |-2i|^2 + |3|^2 = 15$
Huom! Autokorrelaatiofunktio on aina konjugaattisymmetrinen, $r_{xx}[-n] = \overline{r_{xx}[n]}$ ja $r_{xx}[0] = E_x$ on reaalinen.

b) $r_{xy}[n] = \overline{x[-n]} * y[n] = \{-3i, 2, \underset{\uparrow}{1-i}\} * \{\underset{\uparrow}{0}, 1-i, -2i, 3\}$
$= \{-3-3i, \underset{\uparrow}{-4-2i}, -15i, 4-2i, 3-3i\}$.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & -3i & 2 & 1-i \\
 & 0 & 1-i & -2i & 3 \\
\cline{2-5}
 & & -9i & 6 & 3-3i \\
 & -6 & -4i & -2-2i & \\
-3-3i & 2-2i & -2i & & \\
\hline
-3-3i & -4-2i & -15i & 4-2i & 3-3i
\end{array}
$$

Ristikorrelaatio on suurin viiveellä 1, jolloin $|r_{xy}[1]| = 15 = \sqrt{E_x E_y}$.
Voidaan todeta, että signaalit ovat lineaarisesti riippuvat: tarkemmin $y[n] = -ix[n-1]$.
(ks. luennot Lause 1.1 ja Cauchy-Schwarzin epäyhtälö)

4. **(p)** Alkavan epidemian aikana sairaalaan tulee potilaita peräkkäisinä päivinä seuraavasti:

päivä	0	1	2	3	4
potilaita	2	4	5	4	2

a) Taudin hoitoon annettavaa lääkettä annostellaan jokaiselle potilaalle 1. päivänä 4 yksikköä, 2. päivänä 2 yksikköä ja kolmantena 1 yksikkö, jonka jälkeen hänet kotiutetaan. Kuinka monena päivänä lääkettä tarvitaan? Minä päivänä lääkettä tarvitaan eniten?

b) Oletetaan, että potilaalle annostellaankin lääkettä jatkuvasti siten, että sitä liukenee vereen tasaisesti 6 yksikköä kolmen vuorokauden aikana. Lääkeaineen määrä veressä on

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

missä $x(t)$ on liukenemisnopeus ja $h(t) = e^{-t}u(t)$ lääkeaineen hajoamisen aikaprofiili. Paljonko lääkeainetta on enimmillään veressä?

Ratkaisu

a) Lääkettä tarvitaan $5 + 3 - 1 = 7$ päivänä. Olkoon $x[n]$ saapuvien potilaiden lukumäärä päivänä n, missä ensimmäinenä päivänä $n = 0$. Olkoon $y[k]$ lääkkeen annostelu k:ntena hoitopäivänä, missä ensimmäisenä hoitopäivänä $k = 0$. Olkoon vielä $z[n]$ tarvittava lääkkeen määrä päivänä n. Silloin

$$
\begin{aligned}
z[0] &= x[0]y[0] \\
z[1] &= x[1]y[0] + x[0]y[1] \\
z[2] &= x[2]y[0] + x[1]y[1] + x[0]y[2] \\
&\vdots \\
z[n] &= x[n]y[0] + x[n-1]y[1] + x[n-2]y[2] = \sum_{k=0}^{2} x[n-k]y[k]
\end{aligned}
$$

Nyt $x[n] = \{\underset{\uparrow}{2}, 4, 5, 4, 2\}$, $y = \{\underset{\uparrow}{4}, 2, 1\}$ ja $z[n] = x[n] * y[n]$. Alekkainlaskulla

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\
 & & & & 4 & 2 & 1 \\
\cline{3-7}
 & & 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\
 & 4 & 8 & 10 & 8 & 4 & \\
8 & 16 & 20 & 16 & 8 & & \\
\hline
8 & 20 & 30 & 30 & 21 & 8 & 2
\end{array}
$$

joten $z[n] = \{\underset{\uparrow}{8}, 20, 30, 30, 21, 8, 2\}$. Eniten lääkettä tarvitaan päivinä 2 ja 3.

b) Liukenemisnopeus $x(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 3, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$.

Kun $t < 0$,

$$y(t) = \int_0^3 2 \cdot e^{-(t-\tau)} u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0.$$

Kun $0 \leq t \leq 3$,

$$y(t) = \int_0^3 2 \cdot e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) + d\tau = 2\int_0^t e^{-t+\tau}\,\mathrm{d}\tau = 2 \Big/_{0}^{t} e^{-t+\tau} = 2 - 2e^{-t}$$

jolla on suurin arvo päätepisteessä, $y(3) = 2 - 2e^{-3}$. Kun $t > 3$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^3 2 \cdot e^{-(t-\tau)} u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = 2\int_0^3 e^{-t+\tau}\,\mathrm{d}\tau = 2 \Big/_{0}^{3} e^{-t+\tau} = 2e^{-t+3} - 2e^{-t} \\ &= 2e^{-t}(e^3 - 1) < 2e^{-3}(e^3 - 1) = 2 - 2e^{-3}. \end{aligned}$$

Niinpä lääkeainetta on veressä enimmillään $2 - 2e^{-3}$ yksikköä hetkellä $t = 3$.

5. (**n**) Määritellään jatkuva-aikaiset signaalit $x(t) = u(t)$ ja $y(t) = e^{-3t}u(t)$. Laske konvoluution $z(t) = x(t) * y(t)$ arvo hetkellä $t \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu

Kun $t < 0$, niin

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-3(t-\tau)} u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0.$$

Kun $t \geq 0$,

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\mathrm{e}^{-3(t-\tau)} u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^{-3(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{3}(1 - \mathrm{e}^{-3t}).$$

Siis $z(t) = \frac{1}{3}(1 - \mathrm{e}^{-3t})u(t)$.

6. (**n**) Olkoon $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$ ja $y[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3\}$. Laske nollilla täydennettyjen signaalien $x_z[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0\}$ ja $y_z[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 0\}$ syklinen konvoluutio $x_z[n] \circledast y_z[n]$. Voit käyttää esim. Matlabia. Kokeile eri määriä nollia lopussa. Mitä huomaat, kun vertaat tulosta lineaariseen konvoluution $x[n] * y[n]$?

Ratkaisu Katso erillinen tiedosto h1t6.mlx.