Signaalianalyysi 031080A

1. välikoe 27.11.2023 Välivaiheet ja perustelut näkyviin!

1. (a) i. Määrää signaalin $x(t)$ energia, kun $x(t) = \begin{cases} 2i, & 0 < t \leq 1, \\ -2i, & 1 < t \leq 2, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$ (2 p)

   ii. Keksi signaali, jonka keskimääräinen teho on 4. Muista perustella vastauksesi. (1 p)

   (b) Laske konvoluutio $u(t) * e^{-t}u(t)$. (3 p)

Ratkaisu.

(a) i. $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_0^1 |-2i|^2 dt + \int_1^2 |2i|^2 dt = \int_0^1 4dt + \int_1^2 4dt = 8$

ii. Esim. $x(t) = 2$, jolloin hetkellinen teho (ja myös keskimääräinen teho) on $|x(t)|^2 = 4$

(b)

$$u(t) * e^{-t}u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau = \begin{cases} \int_0^t e^{-t+\tau}d\tau = 1 - e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} = (1 - e^{-t})u(t).$$

Monet yrittivät käyttää Fourier-muunnosta ratkaisuun, ja käyhän sekin. Silloin ratkaisu menee näin:

$$\mathcal{F}\{u(t) * e^{-t}u(t)\} = \left(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{i2\pi f}\right)\frac{1}{1+i2\pi f} = \frac{1}{2}\delta(f)\frac{1}{1+i2\pi\cdot 0} + \frac{1}{i2\pi f\cdot(1+i2\pi f)}$$
$$\overset{\text{OMK}}{=} \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{i2\pi f} - \frac{1}{1+i2\pi f}$$
$$\Rightarrow u(t) * e^{-t}u(t) = u(t) - e^{-t}u(t) = (1 - e^{-t})u(t).$$

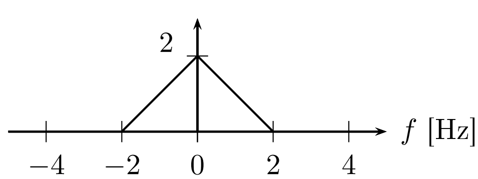
2. Analogisesta signaalista $x(t)$ otetaan näytteitä näytteenottotaajuudella 5 Hz.

   (a) Mikä on tällöin näytteenottoväli? (1 p)

   (b) Olkoon $\Delta(t) = \sum_{n-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$. Johda (kaavakokoelman avulla) näytejonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t)$ Fourier-muunnos $\hat{X}(f)$ signaalin $x(t)$ Fourier-muunnoksen $X(f)$ funktiona. (2 p)

   (c) Olkoon $X(f)$ on esitettynä alla olevassa kuvassa. Piirrä näytejonon $\hat{x}(t)$ amplitudispektri välillä $[-5, 5]$ Hz. Tapahtuuko laskostumista? Mikä on signaalin $x(t)$ Nyquistin taajuus ja miten se liittyy näytteistykseen? (3 p)

Kuva 1



Ratkaisu.

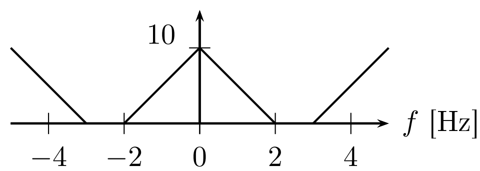
(a) $\frac{1}{5}$ s.

(b)

$$\mathcal{F}\{x(t)\Delta(t)\} \overset{\text{A11,B17}}{=} X(f) * \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{n}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f)*\delta(f-\frac{n}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-\frac{n}{T}).$$

Huom! Puuttuva konvoluution merkki $\Rightarrow$ 0 p tästä osiosta.

(c) (b)-kohdan perusteella $\mathcal{F}\{x(t)\Delta(t)\} = 5\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-5n)$.



Ei laskostumista, $f_s > f_N = 2f_c = 2\cdot 2 = 4$. Nyquistin taajuus on pienin näytteenottotaajuus, jolla laskostumista ei (yleisesti) tapahdu.

3. (a) Analogisesta signaalista $x(t)$ on otettu näytteitä näytteenottotaajuudella 200 Hz, jolloin on saatu aikadiskreetti signaali $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, 0\}$. Määrää signaalin $x[n]$ 4 pisteen diskreetti Fourier-muunnos. Mitä analogisia taajuuksia saamasi luvut edustavat?

(b) Signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos on kuten tehtävässä 2.(c).

i. Piirrä signaalin $x(t)e^{i8\pi t}$ Fourier-muunnos.

ii. Piirrä signaalin $x(t)\cos(8\pi t)$ Fourier-muunnos.

iii. Piirrä signaalin $x_+(t) = x(t) + i\hat{x}(t)$ Fourier-muunnos, missä $\hat{x}(t)$ on nyt signaalin $x(t)$ Hilbert-muunnos (ei tule sekoittaa näytejonoon, jota merkitään samalla symbolilla!).

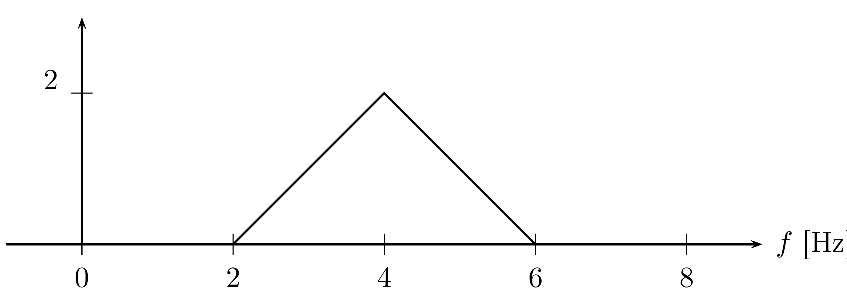
Ratkaisu.

(a) $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{3} x[n](e^{-i\frac{\pi}{2}})^{kn}$

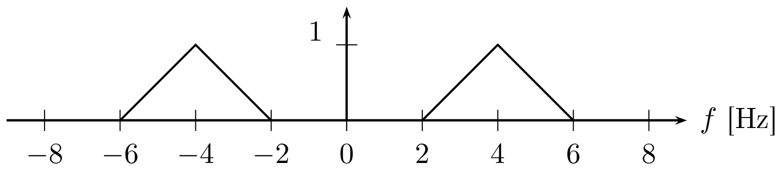
$$\begin{aligned}
X[0] &= 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 && = 0\\
X[1] &= 1\cdot 1 + 0\cdot(-i) + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot i && = 2\\
X[2] &= 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 0\cdot(-1) && = 0\\
X[3] &= \overline{X[1]} && = 2
\end{aligned}$$

Taajuusresoluutio on $\Delta f = \frac{1}{NT} = \frac{f_s}{N} = 50$ Hz, joten ylläolevat luvut edustavat analogisia taajuuksia 0 Hz, 50 Hz, 100 Hz ja 50 Hz (konjugaattisymmetrian vuoksi).

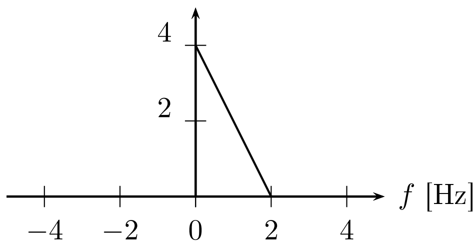
(b) i. $\mathcal{F}\{x(t)e^{i2\pi\cdot 4t}\} \overset{\text{A5}}{=} X(f-4)$



ii. $\mathcal{F}\{x(t)\cos(2\pi\cdot 4t)\} \overset{\text{A11,B12}}{=} X(f) * \frac{1}{2}[\delta(f-4)+\delta(f+4)] = \frac{1}{2}X(f-4) + \frac{1}{2}X(f+4)$



iii. $\mathcal{F}\{x(t) + i\hat{x}(t)\} \overset{\text{J1}}{=} X(f) - i\,\mathrm{sgn}(f)X(f) = \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$



4. Kuvan 2 LR-piiri toteuttaa differentiaaliyhtälön

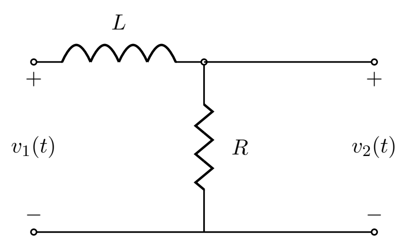
$$\frac{L}{R}v_2'(t) + v_2(t) = v_1(t),$$

missä jännite $v_1(t)$ on heräte ja jännite $v_2(t)$ on vaste sekä $R = 4\ \Omega$ ja $L = 1$ H.

a) Määrää piirin taajuusvastefunktio ja impulssivaste.

b) Määrää amplitudivaste, vaihevaste sekä vaste signaaliin $\cos 2\pi f_0 t$, kun $f_0 = \frac{1}{\pi}$.

Kuva 2



Ratkaisu.

(a)

$$\begin{aligned} v_2'(t) + 4v_2(t)) &= 4v_1(t) && \mid \mathcal{F}(\cdot) \\ i2\pi f V_2(f) + 4V_2(f) &= 4V_1(f) \\ V_2(f) &= \frac{4}{4 + i2\pi f}V_1(f) \end{aligned}$$

Taajuusvastefunktio

$$H(f) = \frac{4}{4 + i2\pi f},$$

Impulssivaste

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = 4e^{-4t}u(t).$$

(b) Amplitudivaste

$$|H(f)| = \frac{4}{\sqrt{16 + 4\pi^2 f^2}}$$

Vaihevaste

$$\theta(f) = \arg H(f) = \arg 4 - \arg(4 + i2\pi f) = 0 - \arctan\frac{2\pi f}{4} = -\arctan\frac{\pi f}{2}$$

Vaste signaaliin $\cos 2\pi f_0 t$, kun $f_0 = \frac{1}{\pi}$

$$|H(\frac{1}{\pi})|\cos(2t + \theta(\frac{1}{\pi})) = \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos(2t - \arctan\frac{1}{2}).$$