Signaalianalyysi 031080A

2. välikoe 18.12.2023

1. (a) Satunnaismuuttujan A jakauman (piste)todennäköisyysfunktio on annettu oheisessa taulukossa.

a_k	1	2	4	8
$P(A = a_k)$	0.25	0.25	0.25	0.25

Laske A:n odotusarvo $E(A)$ ja varianssi $D^2(A) = \mathrm{Var}(A)$.

(b) Satunnaismuuttuja Θ noudattaa tasajakaumaa $\mathrm{U}(0, 2\pi)$. Laske odotusarvot $E(\cos(\Theta))$ ja $E(\cos(t + \Theta))$, $t \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu

(a)

$$\begin{aligned}
E(A) &= 0.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2 + 0.25 \cdot 4 + 0.25 \cdot 8 = 3.75 \\
E(A^2) &= 0.25 \cdot 1^2 + 0.25 \cdot 2^2 + 0.25 \cdot 4^2 + 0.25 \cdot 8^2 = 21.25 \\
D^2(A) &= 21.25 - 3.75^2 = 7.1875
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
E(\cos(\Theta)) &= \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \frac{1}{2\pi}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \Big/_{\!0}^{2\pi} \sin(\theta) = \frac{1}{2\pi}(\sin(2\pi) - \sin(0)) = 0 \\
E(\cos(t + \Theta)) &= \int_0^{2\pi} \cos(t + \theta) \frac{1}{2\pi}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \Big/_{\!0}^{2\pi} \sin(t + \theta) = \frac{1}{2\pi}(\sin(t + 2\pi) - \sin(t)) = 0,
\end{aligned}$$

koska $\sin t$ on 2π-jaksollinen, $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$.

2. Satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot ovat $\mu_X = 1$ ja $\mu_Y = 2$ sekä kovarianssimatriisi

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Anna muuttujien X ja Y varianssit sekä korrelaatiokerroin. (2 p)

(b) Matriisin C ominaisvektorit ovat $s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, missä $s \neq 0$, $t \neq 0$. Määrää sellaisen lineaarisen muunnoksen $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ matriisi A, jolla uudet muuttujat U ja V ovat korreloimattomat. Anna muuttujien U ja V odotusarvot ja kovarianssimatriisi.

(4 p)

Ratkaisu

(a) $D^2(X) = 9,\ D^2(Y) = 6.\ \rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{2}{3\cdot\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9}.$

(b) Valitaan matriisin A riveiksi yksikköominaisvektorit

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Uusien muuttujien odotusarvo

$$\begin{pmatrix} E(U) \\ E(V) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{5}}. \end{pmatrix}$$

Uusien muuttujien kovarianssimatriisi

$$C_{(U,V)} = ACA^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Olkoon stationaarisen satunnaissignaalin $X(t)$ odotusarvo nolla ja autokorrelaatiofunktio $R_X(\tau) = \mathrm{tri}(\tau)$.

   (a) Määrää signaalin $Y(t) = 1 + X(t)$ autokorrelaatiofunktio. (2 p)

   (b) Määrää signaalin $Z(t) = Y(t)\cos(t+\Theta)$ autokorrelaatiofunktio, kun $\Theta \sim \mathrm{U}(0, 2\pi)$ on riippumaton signaalista $Y(t)$.

   (3 p)

   (c) Mikä on signaalin $Z(t)$ keskimääräinen teho? (1 p)

Ratkaisu

(a)

$$\begin{aligned} R_Y(t, t+\tau) &= E[Y(t)Y(+\tau)] = E[(1 + X(t))(1 + X(t+\tau))] \\ &= 1 + \underbrace{E[X(t)]}_{=0} + \underbrace{E[X(t+\tau)]}_{=0} + \underbrace{E[X(t)X(t+\tau)]}_{=R_X(\tau)} = 1 + \mathrm{tri}(\tau). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} R_Z(t, t+\tau) &= E[Z(t)Z(t+\tau)] \\ &= E[Y(t)\cos(t+\Theta)Y(t+\tau)\cos(t+\tau+\Theta)] \end{aligned}$$

($Y(t)$ ja Θ riippumattomia)

$$
\begin{aligned}
&= E[Y(t)Y(t+\tau)]E[\cos(t+\Theta)\cos(t+\tau+\Theta)] \\
&\overset{\text{D9}}{=} R_Y(\tau)\frac{1}{2}[\cos(\tau) + E[\cos(2t+\tau+2\Theta)]] \\
&= \frac{1+\mathrm{tri}(\tau)}{2}[\cos(\tau) + \int_0^{2\pi} \cos(2t+\tau+2\theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta] \\
&= \frac{1+\mathrm{tri}(\tau)}{2}[\cos(\tau) + \frac{1}{2\pi} \Big/_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2t+\tau+2\theta)] \\
&= \frac{1+\mathrm{tri}(\tau)}{2}[\cos(\tau) + \frac{1}{4\pi}\underbrace{(\sin(2t+\tau+4\pi) - \sin(2t+\tau)}_{=0,\ \sin(\cdot)\text{ on }4\pi-\text{jaksollinen}}] \\
&= \frac{1+\mathrm{tri}(\tau)}{2}\cos(\tau)
\end{aligned}
$$

(c) $P_Z = R_Z(0) = \frac{1+1}{2}\cos 0 = 1$.

4. Eräällä kausaalisella systeemillä on kausaalinen käänteissysteemi[1]. Kun herätteenä on valkoista kohinaa, jonka tehotiheys on 1, vasteen tehotiheys on

$$\frac{4+4\pi^2 f^2}{1+4\pi^2 f^2}.$$

(a) Mitä tarkoittaa "valkoinen kohina"? (1 p)

(b) Määrää vasteen autokorrelaatiofunktio. (1 p)

(c) Määrää systeemin amplitudivaste. (1 p)

(d) Määrää jokin ratkaisu systeemin taajuusvastefunktiolle $H(f)$ ja impulssivasteelle $h(t)$. Perustele, miksi vastauksesi käy. (3 p)

Ratkaisu

(a) Tehotiheys on vakio, vrt. valkoinen valo.

(b)

$$
\begin{aligned}
S_Y(f) &= \frac{4+4\pi^2 f^2}{1+4\pi^2 f^2} = 1 + \frac{3}{1+4\pi^2 f^2} \\
R_Y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}S_X(f) = \delta(\tau) + \frac{3}{2}e^{-|\tau|}
\end{aligned}
$$

(c) Kaavasta $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = |H(f)|^2 \cdot 1$

$$|H(f)| = \sqrt{S_Y(f)} = \sqrt{\frac{4+4\pi^2 f^2}{1+4\pi^2 f^2}}.$$

[1] Jos systeemin taajuusvastefunktio on $H(f)$, käänteissysteemin taajuusvastefunktio on $1/H(f)$

(d) Kirjoitetaan

$$|H(f)|^2 = \frac{4+4\pi^2 f^2}{1+4\pi^2 f^2} = \frac{2+i2\pi f}{1+i2\pi f} \cdot \frac{2-i2\pi f}{1-i2\pi f} = H(f)\overline{H(f)}$$

ja valitaan

$$H(f) = \frac{2+i2\pi f}{1+2\pi f},$$

jolloin

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{1 + \frac{1}{1+i2\pi f}\} = \delta(t) + e^{-t}u(t).$$

Systeemi on tällöin kausaalinen, koska $h(t) = 0,\ t < 0$. Samoin käänteissysteemi on kausaalinen, koska

$$\mathcal{F}^{-1}\{\frac{1+i2\pi f}{2+i2\pi f}\} = \mathcal{F}^{-1}\{1 - \frac{1}{2+i2\pi f}\} = \delta(t) - e^{-2t}u(t) = 0,\ t < 0.$$