Signaalianalyysi 031080A

Loppukoe 18.12.2023 Välivaiheet ja perustelut näkyviin!

1. Laske signaalin $x[n] = \{\underset{\uparrow}{-1}, 2, -1\}$

   (a) autokorrelaatiofunktio ja energia,

   (b) 4 pisteen diskreetti Fourier-muunnos (DFT),

   (c) aikadiskreetti Fourier-muunnos (DTFT) ja siihen liittyvä amplitudispektri.

   <u>Ratkaisu</u>

   (a) $r_{xx}[n] = \overline{x[-n]} * x[n] = \{-1, 2, \underset{\uparrow}{-1}\} * \{\underset{\uparrow}{-1}, 2, -1\} = \{1, -4, \underset{\uparrow}{6}, -4, 1\}$,
   $P_x = r_{xx}[0] = 6$.

   (b) $X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-i\frac{2\pi}{4}nk}$

   $$\begin{aligned} X[0] &= -1 + 2 - 1 = 0 \\ X[1] &= -1 - 2i + 1 = -2i \\ X[2] &= -1 - 2 - 1 = -4 \\ X[3] &= \overline{X[1]} = 2i. \end{aligned}$$

   (c)

   $$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = -1 + 2e^{-i\omega} - e^{-i2\omega} = e^{-i\omega}(2 - 2\cos\omega) \\ |X(\omega)| &= \underbrace{|e^{-i\omega}|}_{=1}\,|\underbrace{2 - 2\cos\omega}_{\geq 0}| = 2 - 2\cos\omega. \end{aligned}$$

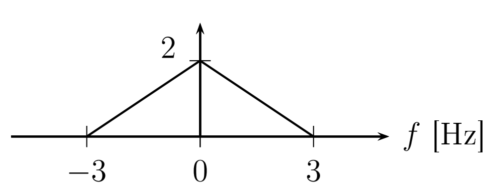
2. Analogisesta signaalista $x(t)$ otetaan näytteitä 0.25 sekunnin välein.

   (a) Mikä on tällöin näytteenottotaajuus? (1 p)

   (b) Olkoon $\Delta(t) = \sum_{n-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. Johda (kaavakokoelman avulla) näytejonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t)$ Fourier-muunnos $\hat{X}(f)$ signaalin $x(t)$ Fourier-muunnoksen $X(f)$ funktiona.
   (2 p)

   (c) Olkoon $X(f)$ on esitettynä alla olevassa kuvassa. Piirrä näytejonon $\hat{x}(t)$ amplitudispektri välillä $[-5, 5]$ Hz. Tapahtuuko laskostumista? Mikä on signaalin $x(t)$ Nyquistin taajuus ja miten se liittyy näytteistykseen? (3 p)

Kuva 1



Ratkaisu.

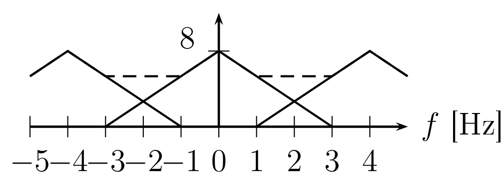
(a) $f_s = 4$ Hz.

(b)

$$\mathcal{F}\{x(t)\Delta(t)\} \overset{\text{A11,B17}}{=} X(f) * \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f - \frac{n}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{n}{T}).$$

Huom! Puuttuva konvoluution merkki $\Rightarrow$ 0 p tästä osiosta.

(c) (b)-kohdan perusteella $\mathcal{F}\{x(t)\Delta(t)\} = 4\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - 4n)$.



Laskostumista välillä $[1, 3]$ Hz, koska $f_s < f_N = 2f_c = 2 \cdot 3 = 6$. Nyquistin taajuus on pienin näytteenottotaajuus, jolla laskostumista ei (yleisesti) tapahdu.

3. Satunnaismuuttujan A jakauman (piste)todennäköisyysfunktio on annettu oheisessa taulukossa.

a_k	1	2	4	8
$P(A = a_k)$	0.25	0.25	0.25	0.25

(a) Laske A:n odotusarvo $E(A)$ ja varianssi $D^2(A) = \mathrm{Var}(A)$. (2 p)

(b) Satunnaismuuttuja Θ on riippumaton satunnaismuuttujasta A ja noudattaa tasajakaumaa $\mathrm{U}(0, 2\pi)$. Laske signaalin $X(t) = A\cos(t + \Theta)$ odotusarvo- ja autokorrelaatiofunktiot. (4 p)

Ratkaisu

(a)

$$E(A) = 0.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2 + 0.25 \cdot 4 + 0.25 \cdot 8 = 3.75$$
$$E(A^2) = 0.25 \cdot 1^2 + 0.25 \cdot 2^2 + 0.25 \cdot 4^2 + 0.25 \cdot 8^2 = 21.25$$
$$D^2(A) = 21.25 - 3.75^2 = 7.1875$$

(b)

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= E[A\cos(t+\Theta)] \overset{\text{r:ttomuus}}{=} E[A]E[\cos(t+\Theta)] = 3.75\int_0^{2\pi}\cos(t+\theta)\,\frac{1}{2\pi}d\theta \\
&= \frac{3.75}{2\pi}\Big/_0^{2\pi}\sin(t+\theta) = \frac{3.75}{2\pi}(\sin(t+2\pi)-\sin(t)) = 0 \\
R_X(t,t+\tau) &= E[A\cos(t+\Theta)\cdot A\cos(t+\tau+\Theta)] \\
&\overset{\text{r:ttomuus}}{=} E(A^2)E[\cos(t+\Theta)\cos(t+\tau+\Theta)] \\
&\overset{\text{D9}}{=} 21.25\,E\{\frac{1}{2}[\cos\tau+\cos(2t+\tau+2\Theta)]\} \\
&= \frac{21.25}{2}[\cos\tau+\int_0^{2\pi}\cos(2t+\tau+2\theta)\,\frac{1}{2\pi}d\theta] \\
&= \frac{21.25}{2}[\cos\tau+\frac{1}{4\pi}\underbrace{\Big/_0^{2\pi}\sin(2t+\tau+2\theta)}_{=0,\ \sin(\cdot)\ 2\pi-\text{jaks.}} = 10.625\cos\tau.
\end{aligned}
$$

4. Eräällä kausaalisella systeemillä on kausaalinen käänteissysteemi[1]. Kun herätteenä on valkoista kohinaa, jonka tehotiheys on 1, vasteen tehotiheys on

$$\frac{2+4\pi^2 f^2}{1+4\pi^2 f^2}.$$

   (a) Mitä tarkoittaa ”valkoinen kohina”? (1 p)
   (b) Määrää vasteen autokorrelaatiofunktio. (1 p)
   (c) Määrää systeemin amplitudivaste. (1 p)
   (d) Määrää systeemin taajuusvastefunktio $H(f)$ ja impulssivaste $h(t)$. Perustele, miksi vastauksesi käy. (3 p)

Ratkaisu

(a) Satunnaissignaali, jonka tehotiheys on vakio, vrt. valkoinen valo.

(b)

$$
\begin{aligned}
S_Y(f) &= \frac{2+4\pi^2 f^2}{1+4\pi^2 f^2} = 1+\frac{1}{1+4\pi^2 f^2} \\
R_Y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}S_X(f) = \delta(\tau)+\frac{1}{2}e^{-|\tau|}
\end{aligned}
$$

(c) Kaavasta $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = |H(f)|^2\cdot 1$

$$|H(f)| = \sqrt{S_Y(f)} = \sqrt{\frac{2+4\pi^2 f^2}{1+4\pi^2 f^2}}.$$

[1] Jos systeemin taajuusvastefunktio on $H(f)$, käänteissysteemin taajuusvastefunktio on $1/H(f)$

(d) Kirjoitetaan

$$|H(f)|^2 = \frac{2+4\pi^2 f^2}{1+4\pi^2 f^2} = \frac{\sqrt{2}+i2\pi f}{1+i2\pi f} \cdot \frac{\sqrt{2}-i2\pi f}{1-i2\pi f} = H(f)\overline{H(f)}$$

ja valitaan

$$H(f) = \frac{\sqrt{2}+i2\pi f}{1+2\pi f},$$

jolloin

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{1 + \frac{\sqrt{2}-1}{1+i2\pi f}\} = \delta(t) + (\sqrt{2}-1)e^{-t}u(t).$$

Systeemi on tällöin kausaalinen, koska $h(t) = 0,\ t < 0$. Samoin käänteissysteemi on kausaalinen, koska

$$\mathcal{F}^{-1}\{\frac{1+i2\pi f}{\sqrt{2}+i2\pi f}\} = \mathcal{F}^{-1}\{1 + \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i2\pi f}\} = \delta(t) + (1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}u(t) = 0,\ t < 0.$$