**Signaalianalyysi 031080A**

**2. välikoe 19.12.2022** Välivaiheet ja perustelut näkyviin!

1. (a) Satunnaismuuttujan $A$ jakauman (piste)todennäköisyysfunktio on annettu oheisessa taulukossa.

| $a_k$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(A = a_k)$ | 0.25 | 0.3 | 0.1 | 0.35 |

Laske $A$:n odotusarvo $E(A)$ ja varianssi $D^2(A) = \mathrm{Var}(A)$ sekä $E(2^A)$n.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} E(A) &= -2 \cdot 0.25 - 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.35 = 0 \\ D^2(A) &= E(A^2) - (E(A))^2 \\ &= (-2)^2 \cdot 0.25 + (-1)^2 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.35 - 0^2 = 2.8 \\ E(2^A) &= 2^{-2} \cdot 0.25 + 2^{-1} \cdot 0.3 + 2^1 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.35 = 1.8125 \end{aligned}$$

(b) Satunnaismuuttujan $X$ mahdolliset arvot ovat $-1$, 0 ja 1 ja satunnaismuuttujan $Y$ mahdolliset arvot ovat 2, 4 ja 6. Oheisessa taulukossa on esitetty joitakin $X$:n ja $Y$:n yhteisjakauman ja $Y$:n reunajakauman todennäköisyyksiä.

| $X$ \ $Y$ | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $a$ | $1/25$ | $2/25$ |
| 0 | $4/25$ | $b$ | $4/25$ |
| 1 | $4/25$ | $2/25$ | $c$ |
| $P(Y = y_i)$ | $2/5$ | $1/5$ | $d$ |

i. Määrää puuttuvat todennäköisyydet $a$, $b$, $c$ ja $d$.
ii. Laske ehdollinen todennäköisyys $P(X = 1|Y = 2)$.
iii. Ovatko muuttujat $X$ ja $Y$ tilastollisesti riippumattomat?

Perustele vastauksesi huolella.

Ratkaisu.

(a) $\sum_j P(Y = y_j) = 1$, joten

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + d = 1 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2}{5}$$

$P(Y = y_j) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j)$, joten

$$\begin{aligned} a + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} &= \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{25} \\ \frac{1}{25} + b + \frac{2}{25} &= \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} + \frac{4}{25} + c &= \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{4}{25}, \end{aligned}$$

(b)

$$P(X=1|Y=2) = \frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$$

(c) Muuttujat $X$ ja $Y$ ovat riippumattomat, jos

$$P(X=x_j, Y=y_i) = P(X=x_j)P(Y=y_i)$$

kaikilla $i, j$. Täydentämällä taulukko muuttujan $X$ reunajakaumalla nähdään että tämä toteutuu:

| $X$ \ $Y$ | 2 | 4 | 6 | $P(X=x_j)$ |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $2/25$ | $1/25$ | $2/25$ | $1/5$ |
| 0 | $4/25$ | $2/25$ | $4/25$ | $2/5$ |
| 1 | $4/25$ | $2/25$ | $4/25$ | $2/5$ |
| $P(Y=y_i)$ | $2/5$ | $1/5$ | $2/5$ | |

Muuttujat ovat siis riippumattomat.

2. Satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ kovarianssimatriisi on

$$C_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Muodosta $X$:stä ja $Y$:stä lineaarisella muunnoksella $\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) = A \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ uudet muuttujat $U$ ja $V$, jotka ovat korreloimattomia. Anna lineaarisen muunnoksen matriisi $A$. Mikä on uusien muuttujien kovarianssimatriisi?

Ratkaisu. Ominaisarvot

$$\det(C_{(X,Y)}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \vee \lambda = 3.$$

Ominaisvektorit: $\lambda = 1$

$$(C_{(X,Y)} - 1I)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 3$

$$(C_{(X,Y)} - 3I)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Kirjoitetaan yksikköominaisvektorit $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ja $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ muunnosmatriisin riveiksi:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Uusi kovarianssimatriisi

$$C_{(U,V)} = AC_{(X,Y)}A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Olkoon $Y(t) = X(t)\cos(2\pi t + \Theta)$, missä $\Theta \sim \mathrm{U}(0, 2\pi)$. $X(t)$ on $\Theta$:sta riippumaton satunnaissignaali, jonka autokorrelaatiofunktio on $R_X(\tau) = e^{-|\tau|}$. Laske $Y(t)$:n odotusarvofunktio ja autokorrelaatiofunktio sekä määrää $Y(t)$:n keskimääräinen teho.

<u>Ratkaisu.</u> Odotusarvofunktio

$$\mu_Y(t) = E[X(t)\cos(2\pi t + \Theta)] \overset{\text{r:ttomuus}}{=} E[X(t)]E[\cos(2\pi t + \Theta)] = 0,$$

koska (jompi kumpi ehto riittää/vaaditaan)

$$\lim_{\tau \to \pm\infty} R_X(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad E(X(t)) = 0$$

ja

$$\begin{aligned}
E[\cos(2\pi t + \Theta)] &= \int_0^{2\pi} \cos(2\pi t + \theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \Big/_{0}^{2\pi} \sin(2\pi t + \theta) \\
&= \frac{1}{2\pi}(\sin(2\pi t + 2\pi) - \sin(2\pi t) = 0 \quad (\text{sini } 2\pi - \text{jaksollinen}).
\end{aligned}$$

Autokorrelaatiofunktio

$$\begin{aligned}
R_Y(t, t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t)\cos(2\pi t + \Theta)X(t+\tau)\cos(2\pi(t+\tau) + \Theta)] \\
&\overset{\text{r:ttomuus}}{=} E[X(t)X(t+\tau)]E[\cos(2\pi t + \Theta)\cos(2\pi t + 2\pi\tau + \Theta)] \\
&\overset{\text{D9}}{=} R_X(\tau)E[\frac{1}{2}\cos(2\pi\tau) + \frac{1}{2}\cos(4\pi t + 2\pi\tau + 2\Theta)] \\
&\overset{\text{J4}}{=} \frac{R_X(\tau)}{2}[\cos(2\pi\tau) + \int_0^{2\pi} \cos(4\pi t + 2\pi\tau + 2\theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta] \\
&= \frac{R_X(\tau)}{2}[\cos(2\pi\tau) + \underbrace{\Big/_{0}^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(4\pi t + 2\pi\tau + 2\theta)\frac{1}{2\pi}}_{=0,\text{ sini } 2\pi\text{-jaksollinen}}] \\
&= \frac{e^{-|\tau|}}{2}\cos(2\pi\tau)
\end{aligned}$$

$Y(t)$ on stationaarinen, koska $\mu_Y(t)$ on vakio ja $R_Y(t, t+\tau) = R_Y(\tau)$, joten keskimääräinen teho $P_Y = E[Y^2(t)] = R_Y(0) = \frac{1}{2}$.

4. (a) Valkoista kohinaa, jonka tehotiheys on 1, syötetään herätteenä tuntemattomaan kausaaliseen analogiseen LTI-järjestelmään. Vasteen tehotiheydeksi mitataan tällöin

$$\frac{4}{9 + 4\pi^2 f^2}$$

Määrää systeemin taajuusvastefunktio $H(f)$ ja impulssivaste $h(t)$.

Ratkaisu Vasteen tehotiheyden kaavalla

$$\frac{4}{9+4\pi^2 f^2} = S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = H(f)\overline{H(f)} \cdot 1$$
$$\Rightarrow H(f)\overline{H(f)} = \frac{4}{9+4\pi^2 f^2} = \frac{2}{3+i2\pi f}\frac{2}{3-i2\pi f}$$

Valitaan taajuusvastefunktioksi $H(f) = \frac{2}{3+i2\pi f}$, jolloin $h(t) = 2e^{-3t}u(t) = 0$, kun $t < 0$, ja järjestelmä on kausaalinen.

(b) Kausaalisen diskreettiaikaisen LTI-systeemin siirtofunktio on

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Määrää vasteen tehotiheysspektri ja autokorrelaatiofunktio, kun heräte on diskreettiä valkoista kohinaa, jonka varianssi on $\sigma^2$.

Ratkaisu. Taajuusvastefunktio on

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{i\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-i\omega}}.$$

$S_X(\omega) = \sigma^2$. Vasteen tehotiheys:

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= H(\omega)\overline{H(\omega)}S_X(\omega) \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-i\omega}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{i\omega}} \cdot \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \frac{1}{1-\frac{1}{2}(e^{i\omega}+e^{-i\omega})+\frac{1}{4}} \\ &= \sigma^2 \frac{1}{1-\cos\omega+\frac{1}{4}} \\ &= \frac{4\sigma^2}{3}\frac{1-(\frac{1}{2})^2}{1-2\cdot\frac{1}{2}\cos\omega+(\frac{1}{2})^2} \end{aligned}$$

Vasteen autokorrelaatio (kaava I5)

$$R_Y[k] = \frac{4\sigma^2}{3}(\frac{1}{2})^{|k|}.$$