Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 7 syksy 2021

1. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen.

2. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

3. (**p**) Stationaarisen analogisen signaalin $X(t)$ tehotiheysspektri on

$$S_X(f) = 1 + \frac{11}{25 + 4\pi^2 f^2}.$$

   a) Mikä on signaalin $X(t)$ autokorrelaatiofunktio?

   b) Määrää valkaisusuodatin signaalille $X(t)$, s.o. määrää sellainen kausaalinen LTI-systeemi, jonka vaste on valkoista kohinaa tehotiheydellä 1, kun herätteenä on $X(t)$. Anna systeemin siirtofunktio $H(f)$ ja impulssivaste $h(t)$.

   Ohje: kirjoita aluksi herätteen tehotiheysspektri muodossa $S_X(f) = G(f)\overline{G(f)}$, missä $1/G(f)$ on kausaalisen systeemin siirtofunktio.

<u>Ratkaisu</u>

a) Stationaarisen signaalin autokorrelaatiofunktio on tehotiheysspektrin käänteis-Fouriermuunnos (J19-J21)

$$S_X(f) = 1 + \frac{11}{25 + 4\pi^2 f^2} = 1 + \frac{11}{10}\frac{2 \cdot 5}{5^2 + (2\pi f)^2}$$
$$\overset{\text{B8,B4}}{\leftrightarrow} R_X(\tau) = \delta(\tau) + \frac{11}{10}e^{-5|\tau|}.$$

b) Kaavasta $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$ saadaan $|H(f)|^2 = \frac{S_Y(f)}{S_X(f)}$. Nyt $S_Y(f) = 1$, joten

$$|H(f)|^2 = H(f)\overline{H(f)} = \frac{1}{S_X(f)}.$$

Kirjoitetaan $S_X(f)$ tulomuodossa $S_X(f) = G(f)\overline{G(f)}$, missä $1/G(f) =: H(f)$ on kausaalinen: aluksi laventamalla saadaan osamäärä

$$S_X(f) = 1 + \frac{11}{25 + 4\pi^2 f^2} = \frac{25 + 4\pi^2 f^2}{25 + 4\pi^2 f^2} + \frac{11}{25 + 4\pi^2 f^2} = \frac{36 + (2\pi f)^2}{25 + (2\pi f)^2}$$

Säännön $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$ avulla saadaan ns. spektraalifaktorointi

$$S_X(f) = \frac{6 + i2\pi f}{5 + i2\pi f}\frac{6 - i2\pi f}{5 - i2\pi f}.$$

Valitaan $G(f) = \frac{6+i2\pi f}{5+i2\pi f}$, $\overline{G(f)} = \frac{6-i2\pi f}{5-i2\pi f}$ ja

$$H(f) = \frac{1}{G(f)} = \frac{5+i2\pi f}{6+i2\pi f}.$$

Tällöin systeemi on kausaalinen, sillä

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\frac{5+i2\pi f}{6+i2\pi f}\} = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{6+i2\pi f}{6+i2\pi f} - \frac{1}{6+i2\pi f}\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{1 - \frac{1}{6+i2\pi f}\} = \delta(t) - e^{-6t}u(t) = 0, \quad \text{kun } t < 0. \end{aligned}$$

4. (**p**) Harjoituksen 4 tehtävän 4 aikadiskreetin LTI-systeemin

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{2}}y[n-1] + \frac{1}{\sqrt{2}}x[n-1].$$

siirtofunktio oli

$$H(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}.$$

Olkoon herätteenä diskreettiä valkoista kohinaa, joka noudattaa normaalijakaumaa $\mathcal{N}(0,1)$. Määrää vasteen tehotiheysspektri sekä herätteen ja vasteen ristitehotiheysspektri. Mikä on vasteen autokorrelaatiofunktio?

Ratkaisu. Heräte on diskreettiä valkoista kohinaa, jonka tehotiheys on $S_X(\omega) = 1$ (ks. tehtävä 6). Vasteen tehotiheysspektri

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = H(\omega)\overline{H(\omega)} \cdot 1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\omega}+e^{-i\omega}) + \frac{1}{2}} = \frac{1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{1 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\omega + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}. \end{aligned}$$

Vasteen autokorrelaatiofunktio:

$$R_Y[k] = (\frac{1}{\sqrt{2}})^{|k|}$$

Herätteen ja vasteen ristitehotiheys:

$$S_{XY}(\omega) = H(\omega)S_X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i\omega}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega}}.$$

5. (**n**) Kausaalisen analogisen LTI-systeemin herätteen $X(t)$ autokorrelaatiofunktio on $R_X(\tau) = 4e^{-2|\tau|}$. Vasteen $Y(t)$ autokorrelaatiofunktio on $R_Y(\tau) = \frac{8}{3}e^{-|\tau|} - \frac{4}{3}e^{-2|\tau|}$. Määrää systeemin siirtofunktio $H(f)$ ja impulssivaste $h(t)$. Laske myös ristitehotiheys $S_{XY}(f)$ ja ristikorrelaatiofunktio $R_{XY}(\tau)$.

Ratkaisu Stationaarisen signaalin tehotiheysspektri on $\mathcal{F}\{R_X(\tau)\}$ (kaava J19).

$$S_X(f) = 4\frac{4}{4+4\pi^2 f^2} \qquad (\text{B4}, \ a = 2)$$

Vasteen tehotiheys

$$S_Y(f) = \frac{8}{3}\frac{2}{1+4\pi^2 f^2} - \frac{4}{3}\frac{4}{4+4\pi^2 f^2} \qquad (\text{B4},\ a=1,\ a=2)$$

Toisaalta kaavalla J28 $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$, joten

$$|H(f)|^2 = \frac{S_Y(f)}{S_X(f)} = \frac{1}{3}\frac{4+4\pi^2 f^2}{1+4\pi^2 f^2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left[\frac{4+4\pi^2 f^2}{1+4\pi^2 f^2} - \frac{1+4\pi^2 f^2}{1+4\pi^2 f^2}\right] = \frac{1}{1+4\pi^2 f^2}.$$

Kirjoitetaan $|H(f)|^2$ muodossa $|H(f)|^2 = H(f)\overline{H(f)}$, josta siirtofunktion voi poimia. Kaavaa $a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$ soveltaen

$$\begin{aligned} &1^2 + (2\pi f)^2 = (1+i2\pi f)(1-i2\pi f) \\ \Rightarrow\ &H(f)\overline{H(f)} = \frac{1}{1+i2\pi f}\frac{1}{1-i2\pi f} \end{aligned}$$

Hakusessa on kausaalinen systeemi, joten valitaan

$$H(f) = \frac{1}{1+i2\pi f}$$

sillä silloin impulssivasteelle $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$ (kaava J25) pätee

$$h(t) = e^{-t}u(t) = 0,\ \text{kun}\ t < 0$$

eli systeemi on kausaalinen.

Herätteen ja vasteen ristitehotiheys (J30):

$$S_{XY}(f) = H(f)S_X(f) = \frac{1}{1+i2\pi f}\frac{16}{4+4\pi^2 f^2}.$$

Vastaava ristikorrelaatiofunktio saadaan Fourier-käänteismuuntamalla. Kyseessä on rationaalifunktio, jonka osoittajan aste on pienempi kuin nimittäjän, joten voidaan tehdä osamurtokehitelmä. Kirjoitetaan nimittäjä 1. asteen tekijöinä ja yksinkertaisuuden vuoksi merkitään $s = i2\pi f$.

$$\begin{aligned} S_{XY}(f) &= \frac{16}{(1+i2\pi f)(2+i2\pi f)(2-i2\pi f)} \\ &= \frac{16}{(1+s)(2+s)(2-s)} = \frac{A}{1+s} + \frac{B}{2+s} + \frac{C}{2-s} \end{aligned}$$

Kerrotaan nimittäjät pois ja järjestetään s:n potenssien mukaan

$$\begin{aligned} 16 &= A(4-s^2) + B(2+s-s^2) + C(2+3s+s^2) \\ &= 4A + 2B + 2C + (B+3C)s + (-A-B+C)s^2 \end{aligned}$$

Vertaamalla s:n kertoimia vasemmalla ja oikealla puolella saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 4A + 2B + 2C &= 16 \\ \qquad\ B + 3C &= 0 \\ -A - B + C &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A &= \frac{16}{3} \\ B &= -4 \\ C &= \frac{4}{3} \end{cases}$$

Ristitehotiheysspektri tulee muotoon

$$S_{XY}(f) = \frac{16}{3}\frac{1}{1+i2\pi f} - 4\frac{1}{2+i2\pi f} + \frac{4}{3}\frac{1}{2-i2\pi f}$$

Herätteen ja vasteen ristikorrelaatiofunktio on siis (kaava B3, viimeiselle termille myös kaava A2 kun $a=-1$)

$$R_{XY}(\tau) = \frac{16}{3}e^{-t}u(t) - 4e^{-2t}u(t) + \frac{4}{3}e^{2t}u(-t)$$

6. (**n**) Harjoituksen 4 tehtävän 5 aikadiskreetin LTI-systeemin herätteenä on diskreettiä valkoista kohinaa, joka noudattaa normaalijakaumaa $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Määrää vasteen tehotiheysspektri sekä herätteen ja vasteen ristitehotiheysspektri.

<u>Ratkaisu</u>

Kyseisessä tehtävässä systeemin (Z-muunnoksen) siirtofunktioksi saatiin

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+2z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}.$$

Sijoitetaan $z = e^{i\omega}$

$$H(\omega) = \frac{1+2e^{-i\omega}}{1+\frac{1}{3}e^{-i\omega}}.$$

Heräte $X[n]$ on diskreettiä valkoista kohinaa, joka noudattaa normaalijakaumaa $N(0,\sigma^2)$, joten sen autokorrelaatiofunktio on

$$\begin{aligned}
R_X[m] &= E[X[n]X[n+m]] \\
&= \begin{cases} E(X^2[n]), & m=0 \\ E(X[n])E(X[n+m]), & m\neq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma^2+\mu^2, & m=0 \\ 0, & m\neq 0 \end{cases} \\
&= \sigma^2\delta[m]
\end{aligned}$$

ja tehotiheysspektri (kaava I6)

$$S_X(\omega) = \mathcal{F}[R_X[m]] = \sigma^2,\ \forall\omega.$$

Vasteen tehotiheysspektri

$$\begin{aligned}
S_Y(\omega) &= |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = H(\omega)\overline{H}(\omega)S_X(\omega) \\
&= \frac{1+2e^{-i\omega}}{1+\frac{1}{3}e^{-i\omega}}\cdot\frac{1+2e^{i\omega}}{1+\frac{1}{3}e^{i\omega}}\cdot\sigma^2 \\
&= \frac{5+4\cos(\omega)}{\frac{10}{9}+\frac{2}{3}\cos(\omega)}\cdot\sigma^2.
\end{aligned}$$

Herätteen ja vasteen ristitehotiheys (kaava J24)

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= H(f)S_X(\omega) \\ &= \frac{1+2e^{-i\omega}}{1+\frac{1}{3}e^{-i\omega}} \cdot \sigma^2. \end{aligned}$$