Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 6 syksy 2021

1. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

2. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

3. (**p**) Olkoon signaali $X(t)$ binääristä kohinaa (ks. luennot), jonka mahdolliset arvot ovat 1 ja -1. Signaalin odotusarvofunktio on $\mu_X(t) \equiv 0$ ja autokorrelaatiofunktion on $R_X(\tau) = \text{tri}(\tau)$. Mikä ovat seuraavien signaalien odotusarvo- ja autokorrelaatiofunktiot?

   a) $A(t) = 2X(t)$
   b) $B(t) = 2 + X(t)$
   c) $C(t) = X^2(t)$
   d) $D(t) = X(t) + X(t-2)$

   <u>Ratkaisu</u>

   a) $\mu_A(t) = E[2X(t)] = 2E[X(t)] = 2 \cdot 0 = 0$

$$\begin{aligned} R_A(t, t+\tau) &= E[A(t)A(t+\tau)] = E[2X(t) \cdot 2X(t+\tau)] \\ &= 4E[X(t)X(t+\tau)] = 4R_X(\tau) = 4\,\text{tri}(\tau). \end{aligned}$$

   b) $\mu_B(t) = E[2 + X(t)] = 2 + E[X(t)] = 2 + 0 = 2$

$$\begin{aligned} R_B(t, t+\tau) &= E[A(t)A(t+\tau)] = E[(2 + X(t))(2 + X(t+\tau))] \\ &= 4 + 2E[X(t)] + 2E[X(t+\tau)] + E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= 4 + R_X(\tau) = 4 + \text{tri}(\tau). \end{aligned}$$

   c) Nyt $C(t) = X^2(t) \equiv 1$ kaikilla t, joten $\mu_C(t) = E[X^2(t)] = E[1] = 1$.

$$R_C(t, t+\tau) = E[C(t)C(t+\tau)] = E[X^2(t)X^2(t+\tau)] = E[1 \cdot 1] = 1.$$

   d) $\mu_D(t) = E[X(t) + X(t-2)] = E[X(t)] + E[X(t-2)] = 0 + 0 = 0$

$$\begin{aligned} R_D(t, t+\tau) &= E[D(t)D(t+\tau)] = E[(X(t) + X(t-2))(X(t+\tau) + X(t+\tau-2))] \\ &= E[X(t)X(t+\tau)] + E[X(t)X(t+\tau-2)] \\ &\quad + E[X(t-2)X(t+\tau)] + E[X(t-2)X(t+\tau-2)] \\ &= R_X(\tau) + R_X(\tau-2) + R_X(\tau+2) + R_X(\tau) \\ &= 2\,\text{tri}(\tau) + \text{tri}(\tau-2) + \text{tri}(\tau+2). \end{aligned}$$

4. (**p**) Olkoon $Y(t) = X(t)\cos(2\pi t + \Theta)$, missä $\Theta \sim \mathrm{Tas}(0, 2\pi)$. $X(t)$ on Θ:sta riippumaton satunnaissignaali, jonka odotusarvofunktio on $E[X(t)] = 1$ ja autokorrelaatiofunktio on $R_X(\tau) = e^{-|\tau|}$. Laske $Y(t)$:n odotusarvofunktio, autokorrelaatiofunktio ja määrää $Y(t)$:n keskimääräinen teho. Onko $Y(t)$ stationaarinen?

Ratkaisu

$Y(t)$:n odotusarvofunktio

$$
\begin{aligned}
E[Y(t)] &= E[X(t)\cos(2\pi t + \Theta)] \\
&\quad (X(t) \text{ on } \Theta\text{:sta riippumaton}) \\
&= E[X(t)]E[\cos(2\pi t + \Theta)] \\
&= 1 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(2\pi t + \theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \Big/_0^{2\pi} \sin(2\pi t + \theta) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\sin(2\pi t + 2\pi) - \sin(2\pi t)\Big] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$Y(t)$:n autokorrelaatiofunktio

$$
\begin{aligned}
R_Y(t, t+\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= E[X(t)\cos(2\pi t + \Theta)X(t+\tau)\cos(2\pi t + 2\pi\tau + \Theta)] \\
&\quad \left(X(t) \text{ on } \Theta\text{:sta riippumaton, } \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))\right) \\
&= \frac{1}{2}E[X(t)X(t+\tau)]E[\cos(2\pi\tau) + \cos(4\pi t + 2\pi\tau + 2\Theta)] \\
&= \frac{1}{2}R_X(\tau)\left[\cos(2\pi\tau) + \int_0^{2\pi}\cos(4\pi t + 2\pi\tau + 2\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}R_X(\tau)\Big[\cos(2\pi\tau) + \frac{1}{4\pi}\Big/_0^{2\pi}\sin(4\pi t + 2\pi\tau + 2\theta)\Big] \\
&\quad (\text{integrointi yli kahden jakson} = 0) \\
&= \frac{1}{2}R_X(\tau)\cos(2\pi\tau) \\
&= \frac{1}{2}e^{-|\tau|}\cos(2\pi\tau).
\end{aligned}
$$

Keskimääräinen teho $P_Y = E[Y^2(t)] = R_Y(0) = \frac{1}{2}$.

$Y(t)$ on stationaarinen, koska $E[Y(t)]$ ja $R_Y(t, t+\tau)$ ovat ajasta t riippumattomia.

5. (**n**) Olkoon $A(t)$ ja $B(t)$ riippumattomia, nollaodotusarvoisia stationaarisia satunnaissignaaleja, joilla on sama autokorrelaatiofunktio $R_A(\tau) = R_B(\tau) = e^{-|\tau|}$.

   a) Tutki ovatko signaalit $X(t) = A(t)\sin t$ ja $Y(t) = B(t)\cos t$ stationaarisia.

b) Laske ristikorrelaatiofunktio $R_{XY}(t, t+\tau)$. Ovatko $X(t)$ ja $Y(t)$ yhteisstationaariset?

c) Tutki onko signaali $Z(t) = X(t) + Y(t)$ stationaarinen.

Ratkaisu

a)

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[A(t)\sin t] = E[A(t)]\sin t = 0 \\ R_X(t, t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E[A(t)\sin t A(t+\tau)\sin(t+\tau)] \\ &= E[A(t)A(t+\tau)]\sin t \sin(t+\tau) = e^{-|\tau|}\sin t \sin(t+\tau) \end{aligned}$$

Esim. $R_X(0, \pi) = -e^{-\pi} \neq R_X(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = 0$, joten $X(t)$ ei ole stationaarinen. Samalla tavalla

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= 0 \\ R_Y(t, t+\tau) &= e^{-|\tau|}\cos t \cos(t+\tau) \end{aligned}$$

Esim. $R_Y(0, \pi) = 0 \neq R_Y(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = -e^{-\pi}$, joten $Y(t)$ ei ole stationaarinen.

b) Koska $A(t)$ ja $B(t)$ ovat riippumattomat ja nollaodotusarvoiset,

$$\begin{aligned} R_{XY}(t, t+\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] = E[A(t)\sin t B(t+\tau)\cos(t+\tau)] \\ &= E[A(t)]E[B(t)]\sin t \cos(t+\tau) = 0. \end{aligned}$$

Nyt $R_{XY}(t, t+\tau)$ ei riipu t:stä, mutta koska $X(t)$ ja $Y(t)$ eivät ole stationaariset, ne eivät ole myöskään yhteisstationaariset.

c) $Z(t) = X(t) + Y(t)$

$$E[Z(t)] = E[X(t) + Y(t)] = E[X(t)] + E[Y(t)] = 0$$

$$\begin{aligned} R_Z(t, t+\tau) &= E[Z(t)Z(t+\tau)] = E[(X(t)+Y(t))(X(t+\tau)+Y(t+\tau))] \\ &= E[X(t)X(t+\tau) + X(t)Y(t+\tau) + X(t+\tau)Y(t) + Y(t)Y(t+\tau)] \\ &= R_X(t, t+\tau) + \underbrace{R_{XY}(t, t+\tau)}_{\overset{\text{b)}}{=}0} + \underbrace{R_{YX}(t, t+\tau)}_{=0,\text{ kuten } R_{XY}(t,t+\tau)} + R_Y(t, t+\tau) \\ &= R_X(t, t+\tau) + R_Y(t, t+\tau) \\ &= e^{-|\tau|}\sin t \sin(t+\tau) + e^{-|\tau|}\cos t \cos(t+\tau) \\ &\overset{\text{D7}}{=} e^{-|\tau|}\cos\tau \end{aligned}$$

$E[Z(t)] = 0$ ja $R_Z(t, t+\tau) = R_Z(\tau)$ eivät riipu ajasta t, joten $Z(t)$ on stationaarinen.

6. **(n)** Olkoon $X(t) = 2\cos(\Omega t + \Theta)$, missä $\Omega \sim \text{Tas}(-1, 1)$ ja $\Theta \sim \text{Tas}(-\pi, \pi)$ ovat riippumattomia satunnaismuuttujia. Laske $X(t)$:n odotusarvofunktio, oautokorrelaatiofunktio ja keskimääräinen teho.

Ratkaisu

Odotusarvofunktio

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= E[2\cos(\Omega t+\Theta)] \\
&\quad (\text{ ehdollinen od.arvo}) \\
&= 2E\{E[\cos(\Omega t+\Theta)|\Omega]\} \\
&= 2E[\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\Omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta] \\
&= \frac{1}{\pi}E[\Big/_{-\pi}^{\pi}\sin(\Omega t+\theta)] \\
&= \frac{1}{\pi}E[\sin(\Omega t+\pi)-\sin(\Omega t-\pi)] \\
&= \frac{1}{\pi}E[0] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$X(t)$:n autokorrelaatiofunktio

$$
R(t,t+\tau) = E[2\cos(\Omega t+\Theta)\cdot 2\cos(\Omega t+\Omega\tau+\Theta)]
$$

($\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$, kaava D9)

$$
= 2E[\cos(\Omega\tau)] + 2E[\cos(2\Omega t+\Omega\tau+2\Theta)]
$$

(ehdollinen odotusarvo)

$$
\begin{aligned}
&= 2E[\cos(\Omega\tau)] + 2E\{E[\cos(2\Omega t+\Omega\tau+2\Theta)|\Omega]\} \\
&= 2\int_{-1}^{1}\cos(\omega\tau)\frac{1}{2}\,d\omega + 2E[\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\Omega t+\Omega\tau+2\theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta] \\
&= \int_{-1}^{1}\cos(\omega\tau)\,d\omega + \frac{1}{2\pi}E[\underbrace{\Big/_{-\pi}^{\pi}\sin(2\Omega t+\Omega\tau+2\theta)}_{=0,\ \text{integr. yli 2 jakson}}\ ] \\
&= \begin{cases} \Big/_{-1}^{1}\frac{1}{\tau}\sin(\omega\tau) = \frac{\sin(\tau)-\sin(-\tau)}{\tau} = \frac{2\sin(\tau)}{\tau}, & \tau\neq 0 \\ \int_{-1}^{1}\cos(0)\,d\omega = 2, & \tau = 0 \end{cases} \\
&=: R(\tau).
\end{aligned}
$$

Keskimääräinen teho $P = R(0) = 2$.