Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 5 syksy 2021

1. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

2. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

3. (**p**) Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomat ja noudattavat standardisoitua normaalijakaumaa $N(0,1)$.

   a) Mikä on muuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio $f(x,y)$?

   b) Mikä on muuttujien X ja Y:n kovarianssimatriisi $C_{X,Y}$?

   c) Muodostetaan uudet muuttujat U ja V muunnoksella $U = X - 2Y$ ja $V = 2X + Y$. Mikä on muuttujien U ja V yhteisjakauman tiheysfunktio $h(u,v)$? Ovatko U ja V riippumattomat?

   d) Mikä on muuttujien U ja V kovarianssimatriisi?

   <u>Ratkaisu</u>

   a) Normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ tiheysfunktio on

   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}},$$

   missä μ on odotusarvo ja σ^2 varianssi. Nyt siis $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ja $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$. Koska X ja Y ovat riippumattomat, on yhteisjakauman tiheysfunktio

   $$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

   b) Riippumattomat satunnaismuuttujat ovat korreloimattomat (ei välttämättä toisin päin). Niinpä $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ ja kovarianssimatriisi on

   $$C_{X,Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}\, X & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(Y,X) & \mathrm{Var}\, Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   c) Muunnos matriisimuodossa $\left[\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right] = A \left[\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right]$:

   $$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

   Jacobin determinantti

   $$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 5$$

Uusien muuttujien U ja V tiheysfunktio on

$$
\begin{aligned}
h(u,v) &= \frac{1}{|J|} f(x(u,v), y(u,v)) = \frac{1}{5} f(\frac{u+2v}{5}, \frac{-2u+v}{5}) \\
&= \frac{1}{5}\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[(\frac{u+2v}{5})^2 + (\frac{-2u+v}{5})^2]} \\
&= \frac{1}{10\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{u^2+4uv+4v^2}{25} + \frac{4u^2-4uv+v^2}{25}\right]} \\
&= \frac{1}{10\pi} e^{-\frac{1}{10}(u^2+v^2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{5}} \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{v^2}{5}} = h_U(u) h_V(v).
\end{aligned}
$$

Koska $h(u,v) = h_U(u)h_V(v)$, U ja V ovat riippumattomat.

d) Koska U ja V ovat riippumattomat, $\mathrm{Cov}(U,V) = 0$. U:n ja V:n tiheysfunktioista $\mathrm{Var}\, U = \mathrm{Var}\, V = 5$, joten

$$
C_{U,V} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}
$$

Toinen tapa:

$$
C_{U,V} = AC_{X,Y}A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.
$$

4. (**p**) Satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot ovat $\mu_X = 2$ ja $\mu_Y = -1$ sekä varianssit $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 5$. Korrelaatiokerroin on $\rho_{X,Y} = \frac{4}{5}$. Muodostetaan uudet muuttujat $U = X + 2Y$ ja $V = 2X - Y$. Määrää

a) $E(U)$ ja $E(V)$

b) Kovarianssimatriisit $C_{X,Y}$ ja $C_{U,V}$ sekä korrelaatiokerroin $\rho_{U,V}$

c) Millä lineaarisella muunnoksella olisi saatu korreloimattomat muuttujat U ja V?

Ratkaisu

a)

$$
\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} E(U) \\ E(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

b) Kovarianssi $\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_X \sigma_Y \rho(X,Y) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{4}{5} = 4$, joten

$$
C_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.
$$

Siispä

$$C_{(U,V)} = AC_{(X,Y)}A^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 41 \end{pmatrix},$$

eli $D^2(U) = 9,\ D^2(V) = 41, \mathrm{Cov}(U,V) = 12$ sekä $\rho(U,V) = \frac{12}{\sqrt{9}\sqrt{41}} \approx 0.6247$.

c) Kovarianssimatriisin $C_{(X,Y)}$ ominaisarvot:

$$\det(C_{(X,Y)} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 1$. Ominaisvektorit:

$$\lambda_1 = 9: \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow a = b,\ \text{valitaan} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1: \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow a = -b,\ \text{valitaan} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kysytty muunnosmatriisi

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. (**n**) Satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssimatriisi on

$$\begin{pmatrix} 3.7 & 0.9 \\ 0.9 & 1.3 \end{pmatrix}.$$

Muodosta X:stä ja Y:stä lineaarisella muunnoksella uudet muuttujat U ja V, jotka ovat korreloimattomia. Säilyykö yhteenlaskettu varianssi muunnoksessa samana?

Ratkaisu

Muodostetaan lineaarisella muunnoksella $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ korreloimattomat satunnaismuuttujat U ja V (eli $\mathrm{Cov}(U,V) = 0$)

$$C_{(U,V)} = AC_{(X,Y)}A^T = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix}.$$

Matriisi A muodostetaan riveittäin $C_{(X,Y)}$:n ominaisvektoreista. Ominaisarvot λ saadaan yhtälöstä $\det(C_{(X,Y)} - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3.7-\lambda & 0.9 \\ 0.9 & 1.3-\lambda \end{vmatrix} = (3.7-\lambda)(1.3-\lambda) - 0.81 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}.$$

Ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $\left(C_{(X,Y)} - \lambda I\right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{\lambda = 1:} \quad \begin{pmatrix} 2.7 & 0.9 \\ 0.9 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = -3a, \quad \text{valitaan} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda = 4:} \qquad \begin{pmatrix} -0.3 & 0.9 \\ 0.9 & -2.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; a = 3b, \quad \text{valitaan} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lineaarisen muunnoksen matriisi

$$A = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uudet korreloimattomat muuttujat

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} X - 3Y \\ 3X + Y \end{pmatrix}.$$

Nyt: $C_{(U,V)} = AC_{(X,Y)}A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ eli $\mathrm{Cov}(U, V) = 0$. Lisäksi $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 5 = \sigma_U^2 + \sigma_V^2$.

Huomio 1. Normitetuilla ominaisvektoreilla muunnoksesta seuraa $\sigma_U^2 = \lambda_1$, $\sigma_V^2 = \lambda_2$.

Huomio 2. Jos valitaan muunnosmatriisin riveiksi normittamattomat ominaisvektorit, kokonaisvarianssi ei pysy samana. Esim. muunnosmatriisilla $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ saadaan $\sigma_U^2 + \sigma_V^2 = 50$.

6. (**n**) Kirjoita Matlabin komentorivillä `load fisheriris`. Tämä lataa työmuistin muuttujaan `meas` kolmen eri iirislajin, Iris setosan, Iris virginican ja Iris versicolorin verho- ja terälehtien leveyden ja pituuden mittausdataa neljässä sarakkeessa. Kunkin rivin lajitieto löytyy muuttujasta `species`. Määrää (otos)kovarianssimatriisi ja tutki, onko tulos ”laillinen” kovarianssimatriisi, ts. onko matriisi symmetrinen ja positiivisesti semidefiniitti. Määrää lineaarisella muunnoksella uudet muuttujat, jotka ovat korreloimattomat. Laske alkuperäisten ja uusien muuttujien yhteenlasketut varianssit. Mitkä kaksi uusista muuttujista kuvaavat parhaiten mittaustulosten vaihtelun? Piirrä näiden muuttujien hajontakuvio kaksiulotteiseen koordinaatistoon, eri lajit eri värein. Voitko erottaa eri lajit toisistaan suoralla viivalla?

Ratkaisu ks. erillinen Live Script -tiedosto