Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 4 syksy 2021

1. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

2. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

3 (**p**) Laske a)- **tai** b)-kohta.

a) Määrää signaalin $x(t) = 2\sin 20\pi t$

i. Hilbert-muunnos

ii. esiverhokäyrä eli analyyttinen signaali.

Piirrä amplitudispektrit.

b) Olkoon $m(t) = \mathrm{sinc}(t)$. Laske ja piirrä SSB-moduloidun signaalin

$$x(t) = m(t)\cos 2\pi f_c t - \hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t$$

amplitudispektri, kun $f_c = 10$ Hz.

Ratkaisu.

a) i. Signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos on (B13)

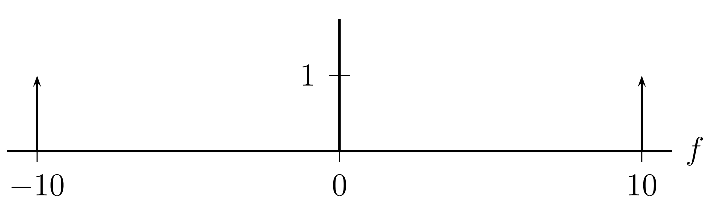
$$X(f) = \frac{1}{i}[\delta(f-10) - \delta(f+10)],$$

joten Hilbert-muunnoksen $\hat{x}(t)$ (J1) Fourier-muunnos on (A12, B15)

$$\hat{X}(f) = -i\,\mathrm{sgn}(f)X(f) = -\delta(f-10) - \delta(f+10)$$

josta $\hat{x}(t) = -2\cos(20\pi t)$ (kaavalla B12). Amplitudispektrit:

$$|X(f)| = |\hat{X}(f)| = \delta(f-10) + \delta(f+10)$$



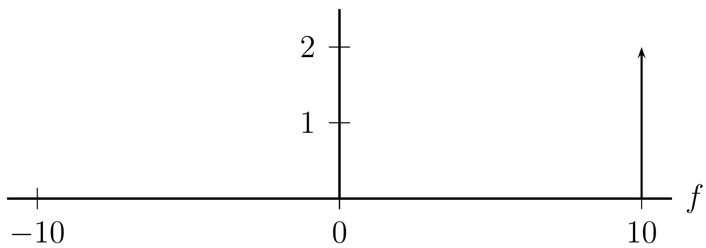
ii. Esiverhokäyrän $x_+(t) = x(t) + i\hat{x}(t)$ (J2) Fourier-muunnos on

$$X_+(f) = X(f) + i\hat{X}(f) = X(f) + \mathrm{sgn}(f)X(f) = \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ X(f), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{2}{i}\delta(f-10),$$

josta kaavalla B11 saadaan $x_+(t) = -2ie^{i20\pi t} = 2e^{i(20\pi t - \frac{\pi}{2})}$.
Amplitudispektri:

$$|X_+(f)| = 2\delta(f-10)$$



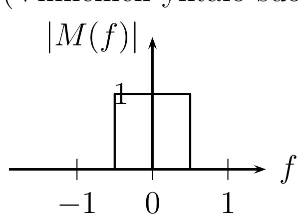
b) $M(f) = \mathrm{rect}(f)$, $M_+(f) = 2\,\mathrm{rect}(\frac{f-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}})$. Luennoista

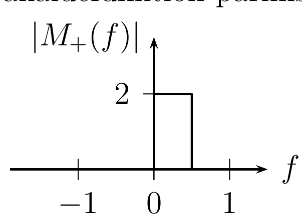
$$\begin{aligned} x_u(t) &= m(t)\cos 2\pi f_c t - \hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t \\ &= \frac{1}{2}[m_+(t)e^{i2\pi f_c t} + \overline{m_+(t)e^{i2\pi f_c t}}] \end{aligned}$$

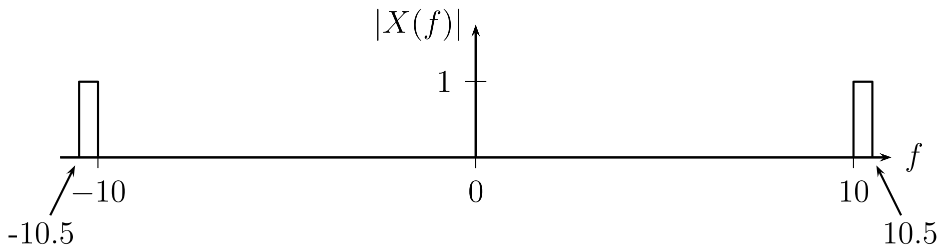
josta kaavalla A10

$$\begin{aligned} X_u(f) &= \frac{1}{2}[M_+(f-f_c) + \overline{M_+(-f-f_c)}] \\ \Rightarrow |X_u(f)| &= \frac{1}{2}|M_+(f-f_c)| + \frac{1}{2}|M_+(-f-f_c)| \\ &= \mathrm{rect}(\frac{f-10-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}) + \mathrm{rect}(\frac{-f-10-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}) \\ &= \mathrm{rect}(\frac{f-10.25}{0.5}) + \mathrm{rect}(\frac{f+10.25}{0.5}). \end{aligned}$$

(Viimeinen yhtälö suorakaidefunktion parillisuuden nojalla.) Amplitudispektrit:







4. (**p**) Lineaarista aikainvarianttia järjestelmää ($x[n]$ on heräte ja $y[n]$ on vaste) kuvaa differenssiyhtälö

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} y[n-1] + \frac{1}{\sqrt{2}} x[n-1].$$

Laske järjestelmän siirtofunktio $H(z)$ ja taajuusvastefunktio $H(\omega)$ ja vaste herätteeseen

$$x[n] = \cos(\frac{\pi}{4} n), \ -\infty < n < \infty.$$

Onko järjestelmä stabiili?

Ratkaisu

Z-muunnetaan LTI-järjestelmää kuvaava differenssiyhtälö

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} Y(z) z^{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} X(z) z^{-1}.$$

Järjestelmän siirtofunktio

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \underline{\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}}}.$$

Taajuusvastefunktio on

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{i\omega}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega}}.$$

$H(z)$:n ainoa napa (nimittäjän nollakohta) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ on yksikköympyrän sisällä
$\Rightarrow$ Systeemi on stabiili.

Vaste herätteeseen $x[n] = \cos(\frac{\pi}{4} n)$: taajuusvaste kyseisellä taajuudella on

$$H(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}} = \frac{1-i}{1+i} = -i$$

Amplitudivaste taajuudella $\frac{\pi}{2}$ on $|H(\frac{\pi}{4})| = |-i| = 1$.
Vaihevaste taajuudella $\frac{\pi}{2}$ on $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$.

$y[n] = 1 \cdot \cos(\frac{\pi}{4} n - \frac{\pi}{2})$.

5. (**n**) Kausaalisen LTI-systeemin vaste on $y[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2\}$ kun heräte on $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, \frac{1}{3}\}$. Määrää systeemin siirtofunktio, impulssivaste ja differenssiyhtälö jonka systeemin heräte ja vaste toteuttavat. Onko systeemi stabiili?

Ratkaisu

Z-muunnetaan signaalit:

$$Y(z) = \mathcal{Z}[y[n]] = \sum_n y[n] z^{-n} = 1 + 2z^{-1}, \quad X(z) = 1 + \frac{1}{3} z^{-1}.$$

Siirtofunktio

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{z+2}{z + \frac{1}{3}}.$$

$H(z)$:n ainoa napa (nimittäjän nollakohta) $z = -\frac{1}{3}$ on yksikköympyrän sisällä
$\Rightarrow$ Systeemi on stabiili.

Siirtofunktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$H(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} + 2z^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \mathcal{Z}\{(-\frac{1}{3})^n u[n]\} + 2z^{-1}\mathcal{Z}\{(-\frac{1}{3})^n u[n]\} \quad \text{(ks. kaavakok.)},$$

joten impulssivasteeksi saadaan

$$\begin{aligned} h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} &= (-\frac{1}{3})^n u[n] + 2\underbrace{(-\frac{1}{3})^{n-1}}_{-3(-\frac{1}{3})^n} u[n-1] \\ &= (-\frac{1}{3})^n (u[n] - 6u[n-1]). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+2z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \Leftrightarrow (1+\frac{1}{3}z^{-1})Y(z) = (1+2z^{-1})X(z).$$

Z-käänteismuuntamalla saadaan differenssiyhtälö

$$y[n] = -\frac{1}{3}y[n-1] + x[n] + 2x[n-1].$$

6. (**n**) Huffman-koodausta käytetään symboleista muodostuvan datajonon mahdollisimman tehokkaaseen binäärikoodaukseen siten, että todennäköisimmät symboli saavat lyhyemmän binäärikoodin kuin epätodennäköiset. Oheisessa taulukossa on esitetty erään datajonon symbolit, vastaavat suhteelliset osuudet sekä Huffman-koodauksen mukainen esitys. Kuinka monta bittiä keskimäärin tarvitaan yhden symbolin koodaamiseen? Mikä on koodisanan pituuden varianssi?

Symboli	suht. osuus	Huffman-koodi
A	36 %	00
B	19 %	010
C	21 %	10
D	3 %	0110
E	20 %	11
F	1 %	0111

Ratkaisu

Merkitään: X =koodisanan pituus.

Odotusarvo

$$\begin{aligned} E(X) = \mu_X &= \sum_k x_k P(X = x_k) \\ &= 2\cdot(0.36+0.21+0.20) + 3\cdot 0.19 + 4\cdot(0.03+0.01) \\ &= 2.27 \end{aligned}$$

Varianssi

$$\begin{aligned}
D^2(X) &= E[(X-\mu_X)^2] \\
&= E(X^2) - \mu_X^2 \\
&= \sum_k x_k^2 P(X = x_k) - \mu_X^2 \\
&= 2^2 \cdot (0.36 + 0.21 + 0.20) + 3^2 \cdot 0.19 + 4^2 \cdot (0.03 + 0.01) - 2.27^2 \\
&= 0.2771
\end{aligned}$$