Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 3 syksy 2021

1. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

2. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

3. (**p**) Minkä aikadiskreetin signaalin Fourier-muunnos (DTFT) on funktio

   a) $X(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$
   (Vinkki: esitä $X(\omega)$ kaavakokoelman taulukosta I löytyvien funktioiden erotuksena.)

   b) $X(\omega) = \cos^2 \omega$? (Vinkki: käytä Eulerin kaavoja.)

   <u>Ratkaisu</u>

   a) Välillä $[-\pi, \pi]$ voidaan kirjoittaa $X(\omega) = 1 - X_1(\omega)$, missä

   $$X_1(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \qquad \longleftrightarrow x_1[n] = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\pi n}, & n \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & n = 0 \end{cases} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\frac{1}{2}n).$$

   Koska $\delta[n] \longleftrightarrow 1$, saadaan

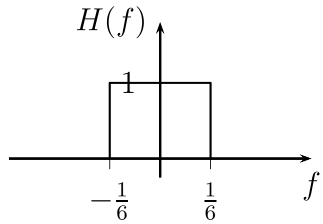
   $$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\frac{1}{2}n).$$

   b) $X(\omega) = \cos^2 \omega = (\frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega}))^2 = \frac{1}{4}(e^{i2\omega} + 2 + e^{-i2\omega})$, joten vertaamalla aikadiskreetin signaalin Fourier-muunnoskaavaan

   $$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \ldots + x[-2]e^{i2\omega} + x[-1]e^{i\omega} + x[0] \cdot 1 + x[1]e^{-i\omega} + x[2]e^{-i2\omega} + \ldots$$

   nähdään, että $x[n] = \{\frac{1}{4}, 0, \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, 0, \frac{1}{4}\}$.

4. **(p)** LTI-systeemin (ideaalinen alipäästösuodatin) siirtofunktio on annettu oheisessa kuvassa.



   a) Määrää impulssivaste $h(t)$. Onko impulssivaste

      1° reaalinen/kompleksiarvoinen

2° parillinen/pariton funktio

3° kausaalinen/ei-kausaalinen?

b) Olkoon heräte $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-9n)$. Piirrä vasteen $y(t)$ Fourier-muunnoksen $Y(f)$ kuvaaja.

c) Määrää b)-kohdan vaste $y(t)$.

Ratkaisu

a) $H(f) = \text{rect}(3f) \quad \Rightarrow h(t) = \frac{1}{3}\,\text{sinc}(\frac{t}{3})$.

1° $h(t)$ on reaalinen

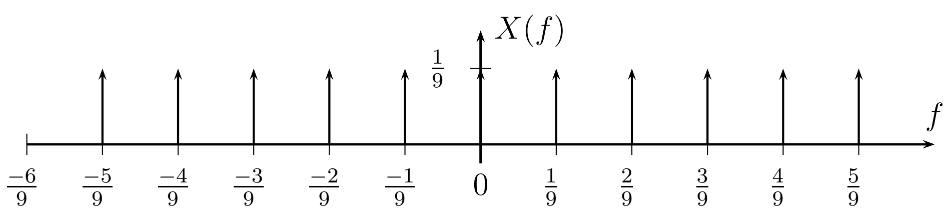
2° $h(-t) = \frac{1}{3}\,\text{sinc}(-\frac{1}{3}t) = \frac{1}{3}\frac{\sin(-\frac{1}{3}\pi t)}{-\frac{1}{3}\pi t} = \frac{1}{3}\frac{\sin(\frac{1}{3}\pi t)}{\frac{1}{3}\pi t} = \frac{1}{3}\,\text{sinc}(\frac{1}{3}t) = h(t)$, joten $h(t)$ on parillinen.

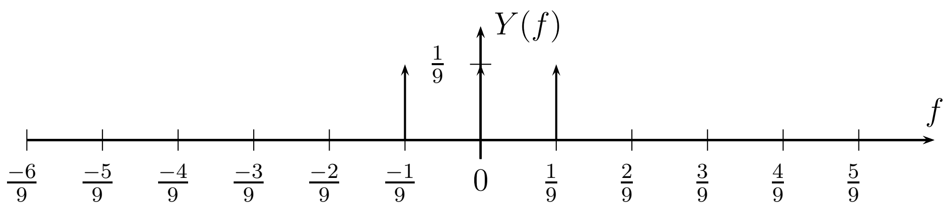
3° $h(t) \neq 0$, kun $t < 0$, $t \neq -1, -2, -3, \ldots$, joten systeemi ei ole kausaalinen.

b) Kaavalla B17 .

$$X(f) = \frac{1}{9}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{1}{9}k)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad Y(f) &= H(f)X(f) = \text{rect}(3f)\cdot\frac{1}{9}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{1}{9}k) \\ &= \frac{1}{9}\delta(f+\frac{1}{9}) + \frac{1}{9}\delta(f) + \frac{1}{9}\delta(f-\frac{1}{9}) \end{aligned}$$





c) Kaavoilla B9 ja B12 $y(t) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9}(\cos\frac{2\pi t}{9})$.

5. **(p)** Signaalista $x(t)$ ($X(f) = 0$, $|f| > 180$ Hz) on näytteenottotaajuudella $f_s = 400$ Hz saatu näytejono

$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}.$$

Laske signaalin 8 pisteen diskreetti Fourier-muunnos (DFT). Piirrä amplitudispektri ja määrää sen avulla mitä analogisia taajuuskomponentteja signaalissa $x(t)$ on esiintynyt.

Ratkaisu

Signaalin $x[n]$ kahdeksan pisteen ($N = 8$) diskreetti Fourier-muunnos

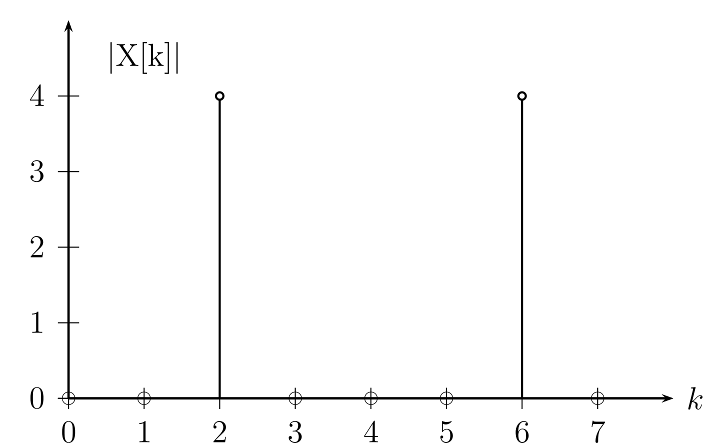
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-i\frac{\pi}{4}kn}, \quad k = 0, 1, ..., 7.$$

Signaalille $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$ saadaan:

$$\begin{aligned}
X[0] &= \sum_{n=0}^{7} x[n] e^{0} = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0 = 0 \\
X[1] &= \sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-i\frac{\pi}{4}n} \\
&= 1 \cdot e^{0} + 0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} - 1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} + 0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} + 1 \cdot e^{-i\pi} + 0 \cdot e^{-i\frac{5\pi}{4}} - 1 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{2}} + 0 \cdot e^{-i\frac{7\pi}{4}} \\
&= 1 + 0 + i + 0 - 1 + 0 - i + 0 = 0 \\
X[2] &= \sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-i\frac{\pi}{2}n} = 1 + 0 - (-1) + 0 + 1 + 0 - (-1) + 0 = 4 \\
X[3] &= \sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-i\frac{3\pi}{4}n} = 1 + 0 - i + 0 - 1 + 0 - (-i) + 0 = 0 \\
X[4] &= \sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-i\pi n} = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0 = 0 \\
X[5] &= \overline{X}(3) = 0 \\
X[6] &= \overline{X}(2) = 4 \\
X[7] &= \overline{X}(1) = 0
\end{aligned}$$

Siis $X[k] = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 4, 0, 0, 0, 4, 0\}$

Amplitudispektri $|X[k]| = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 4, 0, 0, 0, 4, 0\}$



Spektrin taajuusresoluutio on $\Delta f = \frac{1}{NT} = \frac{1}{N} f_s = \frac{400}{8}$ Hz $= 50$ Hz. Indeksiä k vastaava analoginen taajuus on siten $k\Delta f = 50k$ Hz. Jos signaali on näytteistetty vähintään Nyquistin taajuudella, ei taajuuden $f_s/2$ yläpuolella pitäisi olla sisältöä. Miksi sitten DFT:ssä on termejä kohdan $N/2 = 4$ jälkeen?

Reaalisen signaalin $x[n]$ DFT:lle pätee konjugaattisymmetria $X[N-k] = \overline{X[k]}$. Siksi $N/2$:n jälkeen tulevat komponentit amplitudispektrissä ovat vain peilikuva komponenteista $X[k]$, $1 \leq k < \frac{N}{2}$. Ainoa signaalissa esiintynyt analoginen taajuuskomponentti on siis $2 \cdot 50$ Hz $= 100$ Hz.

6. (**n**) Sarjaan kytketyn RL-piirin virta $y(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$y'(t) + y(t) = x(t),\ t \geq 0,\ y(0) = 0.$$

Määrää kyseisen LTI-systeemin siirtofunktio ja impulssivaste. Onko systeemi kausaalinen? Laske amplitudivaste ja vaihevaste sekä vaste herätteeseen $x(t) = u(t)$.

Ratkaisu

Fourier-muunnetaan differentiaaliyhtälö:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow && i2\pi f Y(f) + Y(f) = X(f) \\
&\Rightarrow \text{siirtofunktio} && H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + i2\pi f} \\
&\text{impulssivaste} && h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \mathrm{e}^{-t}u(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \\
&\text{amplitudivaste} && |H(f)| = \frac{|1|}{|1 + i2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2}} \\
&\text{vaihevaste} && \theta(f) = \arg H(f) = \arg 1 - \arg(1 + i2\pi f) = -\overline{\text{arc}}\tan(2\pi f)
\end{aligned}$$

Systeemi on kausaalinen, koska $h(t) = 0$ kun $t < 0$.

Askelvasteeksi eli herätteen $x(t) = u(t)$ vasteeksi saadaan

$$\begin{aligned}
y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^t \mathrm{e}^{-\tau} d\tau = \Big/_0^t - \mathrm{e}^{-\tau} = 1 - \mathrm{e}^{-t}, \quad t \geq 0 \\
y(t) &= 0, \quad t < 0 \\
\Rightarrow y(t) &= (1 - \mathrm{e}^{-t})u(t).
\end{aligned}$$