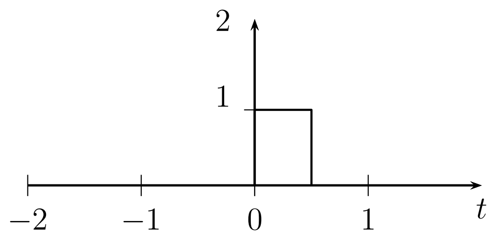
Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 2 syksy 2021

1. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

2. (**k**) Kotitehtävä: vastaukset tulevat Moodleen

3. (**p**) Laske signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos $X(f)$ ja piirrä amplitudispektrin $|X(f)|$ kuvaaja, kun
(a) $x(t)$ on annettu oheisessa kuvassa (b) $x(t) = 6\,\mathrm{sinc}(t-1)$.



Ratkaisu

a) Kaavakokoelmassa määritelty suorakaidefunktio:

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

$x(t)$ on suorakaidefunktio, jonka leveys on $\frac{1}{2}$ ja keskipiste $t = \frac{1}{4}$, joten

$$x(t) = \mathrm{rect}\Big(\frac{t-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\Big) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < \frac{t-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

Fourier-muunnetaan käyttäen hyväksi kaavakokoelman kaavoja B1 ja A4:

$$\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(\frac{t}{\frac{1}{2}})\} \overset{T=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\frac{1}{2}f)$$

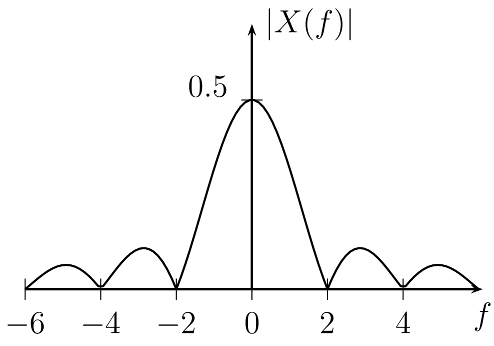
$$X(f) = \mathcal{F}\{\mathrm{rect}(\frac{t-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}})\} = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\frac{f}{2})e^{-i2\pi f\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\frac{f}{2})e^{-i\frac{\pi}{2}f}$$

Amplitudispektri

$$|X(f)| = \frac{1}{2}|\mathrm{sinc}(\frac{f}{2})|$$

Nollakohdat piirtämisen avuksi:

$$|X(f)| = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin(\frac{\pi f}{2}) = 0,\; f \neq 0 \;\Leftrightarrow\; f = \pm 2, \pm 4, \pm 6 \ldots$$

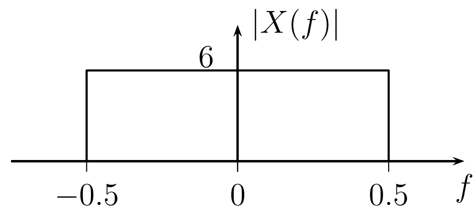


b) Signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos (kaavat B2 ja A4)

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = 6\,\mathrm{rect}(f)e^{-i2\pi f}.$$

Signaalin $x(t)$ amplitudispektri

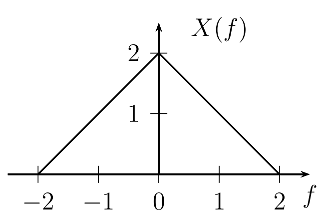
$$|X(f)| = 6\,\mathrm{rect}(f)$$



4. (**p**) Parillisen analogiasignaalin $x(t)$ amplitudispekti on kuvion mukainen. Piirrä $x(t)$:stä otetun näytejonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ amplitudispektri, kun näytteenottoväli on

(a) $T = \frac{1}{3}$ (b) $T = \frac{1}{6}$.

Mikä on signaaliin liittyvä kriittinen näytteenottotaajuus eli ns. Nyquistin taajuus? Miltä näytejonon $\hat{x}(t)$ Fourier-muunnos näyttää, kun näytteenottotaajuus on Nyquistin taajuus?



Ratkaisu

Näytteenotossa signaali $x(t)$ kerrotaan impulssijonolla $\Delta(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$,

$$\hat{x}(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT),$$

missä T on näytteenottoväli. Koska tulon Fourier-muunnos on Fourier-muunnosten konvoluutio, saadaan (kaavoista A11 ja B17)

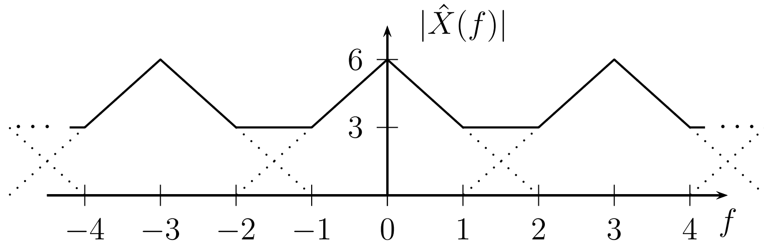
$$\begin{aligned}
\hat{X}(f) &= X(f) * \mathcal{F}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\} \\
&= X(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-\frac{k}{T}) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f-\frac{k}{T}) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f-\frac{k}{T})
\end{aligned}$$

Koska $X(f)$ on ei-negatiivinen, amplitudispektri on $|\hat{X}(f)| = \hat{X}(f)$.

a) $T = \frac{1}{3}$:

$$\hat{X}(f) = 3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f-3k)$$

Spektri toistuu 3:n välein.

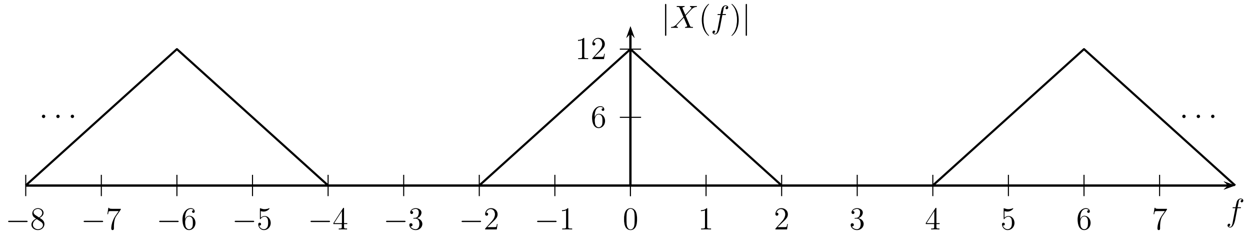


Signaali laskostuu.

b) $T = \frac{1}{6}$:

$$\hat{X}(f) = 6 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f-6k)$$

Spektri toistuu 6:n välein.

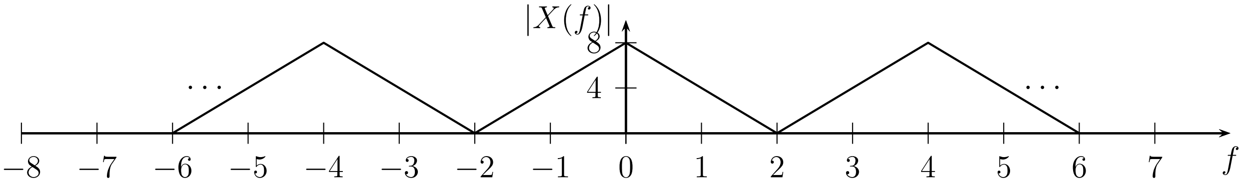


Signaali ei laskostu.

Kriittisellä näytteenottotaajuudella (Nyquistin taajuudella) kopiot sivuavat toisiaan, mutta eivät mene päällekkäin (laskostu). Tässä Nyquistin taajuus on

$$f_s = 2f_c = 4,$$

mihin suurin taajuuskomponentti $f_c = 2$ luetaan $x(t)$:n amplitudispektristä.



5. (**n**) Olkoon $x(t) = \operatorname{sinc}(2t)\cos(6\pi t)$, missä t on aika sekunteina. Piirrä kuva näytejonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t)$ amplitudispektristä $|\hat{X}(f)|$, kun signaali näytteistetään taajuudella

a) $f_s = 5$ Hz

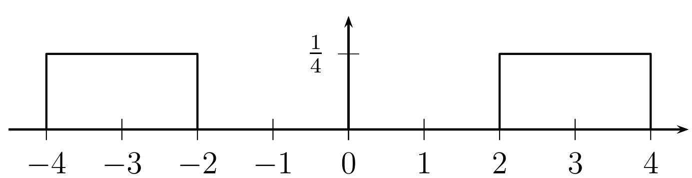
b) $f_s = 10$ Hz.

Tapahtuuko laskostumista? Voidaanko signaali rekonstruoida näytteistään?

RATKAISU Lasketaan amplitudispektri: kaavakokoelman avulla

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \frac{1}{2}\operatorname{rect}(\frac{f}{2}) * \frac{1}{2}[\delta(f-3)+\delta(f+3)] \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{rect}(\frac{f-3}{2}) + \frac{1}{4}\operatorname{rect}(\frac{f+3}{2})
\end{aligned}
$$

Amplitudispektrin $|X(f)|$ kuvaaja:



Näytejonon

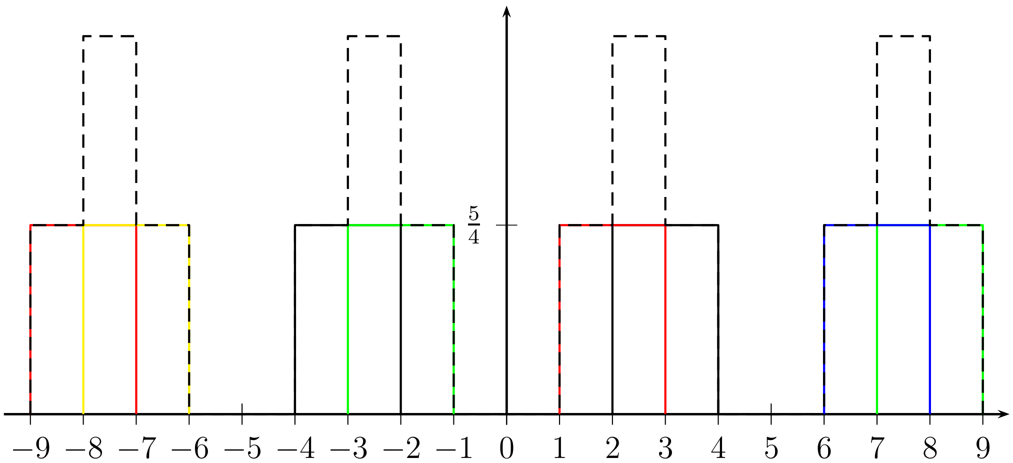
$$\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

Fourier-muunnos on

$$\hat{X}(f) = X(f) * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{k}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f-\frac{k}{T})$$

a) $T = \frac{1}{5}$ s, $f_s = 5$ Hz

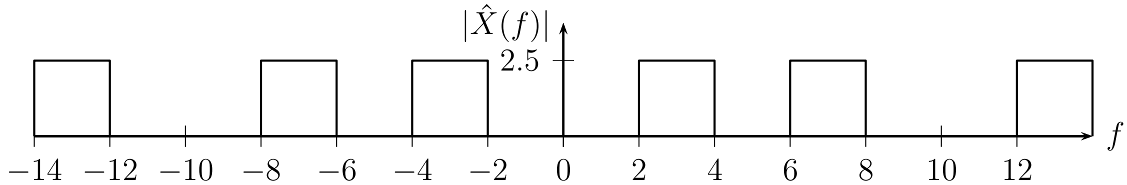
Näytejonon amplitudispektri: $|\hat{X}(f)| = 5 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k5)$



Alueelle $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}] = [-2.5, 2.5]$ laskostuu kopioita, jotka menevät päällekäin. Rekonstruointi ei onnistu.

b) $T = \frac{1}{10}$ s, $f_s = 10$ Hz.

Näytejonon amplitudispektri: $|\hat{X}(f)| = 10 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k10)$



Alueelle $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}] = [-5, 5]$ ei laskostu kopioita. Rekonstruktio onnistuu.

6. (**n**) Laske Fourier-muunnoksen avulla signaalin $x(t) = \mathrm{e}^{-2t}u(t)$ autokorrelaatiofunktio $r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)}x(t+\tau)\,dt$.

<u>Ratkaisu</u>

Koska

$$\begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)}x(t+\tau)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(\tau-(-t))\mathrm{d}t \\ &= x(\tau) * x(-\tau), \end{aligned}$$

niin kaavan A12 avulla voidaan autokorrelaatiofunktio ratkaista Fourier-muunnoksilla:

$$\mathcal{F}\{x(\tau) * x(-\tau)\} = \mathcal{F}\{x(\tau)\} \cdot \mathcal{F}\{x(-\tau)\},$$

jossa kaavan B3 avulla

$$\mathcal{F}\{x(\tau)\} = \mathcal{F}\{\,\mathrm{e}^{-2\tau}u(\tau)\} = \frac{1}{2 + i2\pi f}$$

ja edelleen kaavan A2 avulla

$$\mathcal{F}\{x(-\tau)\} = \frac{1}{2 - i2\pi f}.$$

Siten

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(-\tau)\} \cdot \mathcal{F}\{x(\tau)\} &= \frac{1}{2+i2\pi f} \cdot \frac{1}{2-i2\pi f} = \frac{1}{2^2 + (2\pi f)^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2^2 + (2\pi f)^2}, \end{aligned}$$

josta käänteismuunnoksella (kaava B4) saadaan

$$r_{xx}(\tau) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2|\tau|}.$$