Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät syksy 2021

3. Laske mitkä seuraavista analogisista tai aikadiskreeteistä signaaleista ovat energiasignaaleja ja mitkä tehosignaaleja. Piirrä kuvaajat kohdissa a), b) ja e).

   a) $x(t) = u(t) - u(-t)$

   b) $x(t) = 2e^{-(t-1)}u(t-1)$

   c) $x(t) = e^{i(2\pi t - \frac{\pi}{2})}u(t)$

   d) $x[n] = u[n] - u[3-n]$

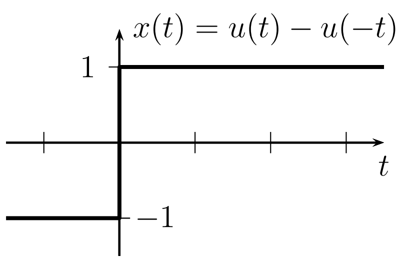
   e) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

<u>Ratkaisu</u>
Analogisen signaalin $x(t)$ energia $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$.
Analogisen signaalin $x(t)$ keskimääräinen teho $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$.

Diskreetin signaalin $x(n)$ energia $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$.
Diskreetin signaalin $x(n)$ keskimääräinen teho $P_x = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} |x(n)|^2$.

Energiasignaalilla $0 < E_x < \infty$ ja tehosignaalilla $0 < P_x < \infty$.

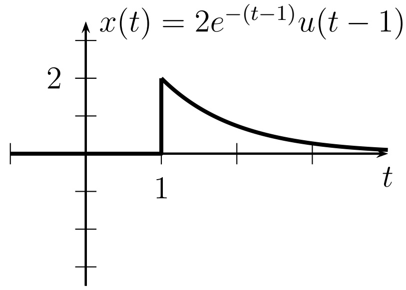
a) Yksikköaskelfunktio $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow u(-t) = \begin{cases} 1, & -t > 0 \Leftrightarrow t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$



$$|x(t)|^2 = (\pm 1)^2 = 1$$
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \, dt = \infty$$
$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 1 \, dt$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \Big/_{-T}^{T} t = \lim_{T\to\infty} \frac{T-(-T)}{2T} = 1 < \infty$$

$0 < P_x < \infty$, joten $x(t)$ on tehosignaali.

b)

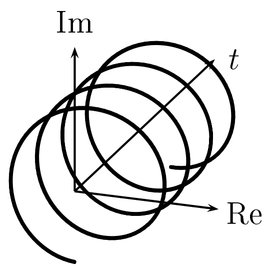


$$|x(t)|^2 = |2e^{-(t-1)}u(t-1)|^2 = \begin{cases} 4e^{-2(t-1)}, & t > 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$$

$$E_x = \int_1^\infty 4e^{-2(t-1)}\ dt = \Big/_{1}^{\infty} -\frac{4e^{-2(t-1)}}{2} = 2 < \infty$$

$0 < E_x < \infty$, joten $x(t)$ on energiasignaali ($\Rightarrow$ $P_x = 0$)

c)



$$x(t) = e^{i(2\pi t - \frac{\pi}{2})}u(t) = e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i2\pi t}u(t) = -ie^{i2\pi t}u(t)$$

$$|x(t)|^2 = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad = u(t)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_0^\infty 1\, dt = \infty$$

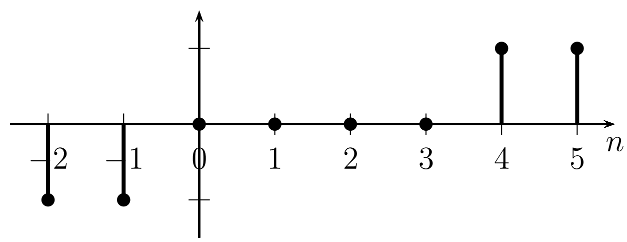
$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T 1\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{2T} = \frac{1}{2}$$

$0 < P_x < \infty$, joten $x(t)$ on tehosignaali.

d) Yksikköaskelfunktio

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow u[3-n] = \begin{cases} 1, & 3-n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 3 \\ 0, & n > 3 \end{cases}$$

$$x[n] = u[n] - u[3-n] = \begin{cases} 0 - 1 = -1, & n < 0 \\ 1 - 1 = 0, & 0 \leq n \leq 3 \\ 1 - 0 = 1, & n > 3. \end{cases}$$



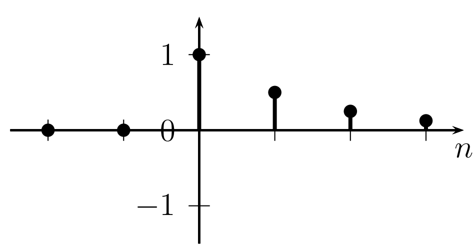
$$|x[n]|^2 = \begin{cases} 1, & n < 0 \ \vee \ n > 3 \\ 0, & n = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$P_x = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} |x[n]|^2 = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \Big(\sum_{n=-M}^{-M} 1 \quad - 4 \Big)$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} (2M + 1 - 4) = \lim_{M\to\infty} \Big(\frac{2M+1}{2M+1} - \frac{4}{2M+1} \Big) = 1 < \infty.$$

$0 < P_x < \infty$ joten x on tehosignaali. ($\Rightarrow \ E_x = \infty$)

e)



$$x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$$

$$|x[n]|^2 = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{2n} = (\frac{1}{4})^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} < \infty$$

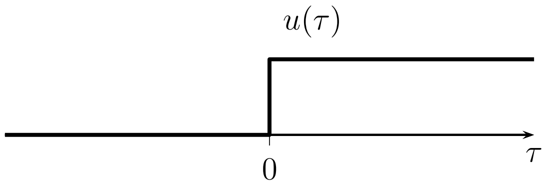
$0 < E_x < \infty$, joten $x[n]$ on energiasignaali ($\Rightarrow \ P_x = 0$)

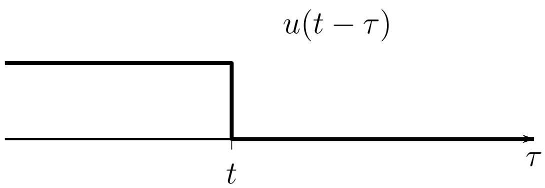
4. Määritellään jatkuva-aikaiset signaalit $x(t) = e^{-t}u(t)$ ja $y(t) = e^{-2t}u(t)$. Laske konvoluutio $z(t) = x(t) * y(t)$.

Ratkaisu

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}u(\tau)e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau-2t}u(\tau)u(t-\tau)\,d\tau.$$

Nyt $u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$ ja $u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$





Kun $t < 0$, integroitava on $u(\tau)u(t-\tau) = 0\ \forall \tau$ ja konvoluution arvoksi tulee $z(t) = 0$.

Kun $t > 0$, integroitava on $u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$

ja

$$z(t) = \int_{0}^{t} e^{\tau-2t} \cdot 1\,d\tau = \Big/_{0}^{t} e^{\tau-2t} = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Kaikkiaan

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t} - e^{-2t}, & t > 0 \end{cases} = (e^{-t} - e^{-2t})u(t).$$

5. Määritellään diskreetit signaalit: $x[n] = \{1 \underset{\uparrow}{+} i, 2, 3i\}$, $y[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1-i, -2i, 3\}$

   a) Laske autokorrelaatio $r_{xx}[l]$ sekä signaalien energiat E_x ja E_y.
   b) Laske ristikorrelaatio $r_{xy}[l]$. Millä viiveen l arvolla ristikorrelaation itseisarvo on suurin? Mikä tämä arvo on?

Ratkaisu

Lasketaan autokorrelaatio

$$r_{xx}[n] = \overline{x[-n]} * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{x[k]}x[k+n]$$

ja ristikorrelaatio

$$r_{xy}[n] = \overline{x[-n]} * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{x[k]} y[k+n]$$

alekkainkertolaskulla, siten että

i. jos summa tai tulo ≥ 10 niin sitä ei merkitä muistiin

ii. nollaindeksin paikka $\uparrow$ määrätään kuten desimaalipilkun paikka

a) $r_{xx}[l] = \overline{x[-n]} * x[n] = \{-3i, 2, \underset{\uparrow}{1} - i\} * \{\underset{\uparrow}{1} + i, 2, 3i\} = \{3-3i, 2-4i, \underset{\uparrow}{15}, 2+4i, 3+3i\}$,
$E_x = r_{xx}[0] = 15$.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & -3i & 2 & 1-i \\
 & & 1+i & 2 & 3i \\
\hline
 & & 9 & 6i & 3+3i \\
 & -6i & 4 & 2-2i & \\
3-3i & 2+2i & 2 & & \\
\hline
3-3i & 2-4i & 15 & 2+4i & 3+3i
\end{array}$$

$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = |0|^2 + |1-i|^2 + |-2i|^2 + |3|^2 = 15$
Huom! Autokorrelaatiofunktio on aina konjugaattisymmetrinen, $r_{xx}[-n] = \overline{r_{xx}[n]}$ ja $r_{xx}[0] = E_x$ on reaalinen.

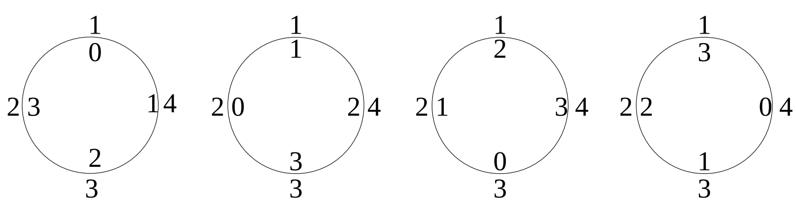
b) $r_{xy}[n] = \overline{x[-n]} * y[n] = \{-3i, 2, 1 \underset{\uparrow}{-} i\} * \{\underset{\uparrow}{0}, 1-i, -2i, 3\}$
$= \{-3-3i, -4 \underset{\uparrow}{-} 2i, -15i, 4-2i, 3-3i\}$.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & -3i & 2 & 1-i \\
 & 0 & 1-i & -2i & 3 \\
\hline
 & & -9i & 6 & 3-3i \\
 & -6 & -4i & -2-2i & \\
-3-3i & 2-2i & -2i & & \\
\hline
-3-3i & -4-2i & -15i & 4-2i & 3-3i
\end{array}$$

Ristikorrelaatio on suurin viiveellä 1, jolloin $|r_{xy}[1]| = 15 = \sqrt{E_x E_y}$.
Voidaan todeta, että signaalit ovat lineaarisesti riippuvat: tarkemmin $y[n] = -ix[n-1]$.
(ks. luennot Lause 1.1 ja Cauchy-Schwarzin epäyhtälö)

6. Laske signaalien $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$ ja $y[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3\}$ syklinen konvoluutio $x[n] \circledast y[n]$ ja konvoluutio $x[n] * y[n]$.

<u>Ratkaisu</u>
Syklisen konvoluution $x[n] \circledast y[n]$ laskenta:



16 18 16 10

$\Rightarrow \quad x[n] \circledast y[n] = \{\underset{\uparrow}{16}, 18, 16, 10\}.$

Konvoluutio $x[n] * y[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\} * \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3\} = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 10, 16, 17, 12\}.$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & & & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\cline{4-7}
 & & & 3 & 6 & 9 & 12 \\
 & & 2 & 4 & 6 & 8 & \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
\hline
0 & 1 & 4 & 10 & 16 & 17 & 12
\end{array}
$$