Signaalianalyysi 031080A

1. välikoe 22.11.2021 Välivaiheet ja perustelut näkyviin!

1. (a) Tutki laskemalla, onko analoginen signaali $x(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$, $t \in \mathbb{R}$ energia- tai tehosignaali.
   (b) Laske signaalin $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, i\}$ autokorrelaatio $r_{xx}[m]$ ja energia E_x, kun $i^2 = -1$.

Ratkaisu.

(a) Kaava H1

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2(t-1)}u(t-1)|^2 dt = \int_1^{\infty} e^{-4t+4}\, dt = \Big/_{1}^{\infty} -\frac{1}{4}e^{-4t+4} = -\frac{1}{4}(\lim_{t\to\infty} e^{-4t+4} - 1) = \frac{1}{4}$$

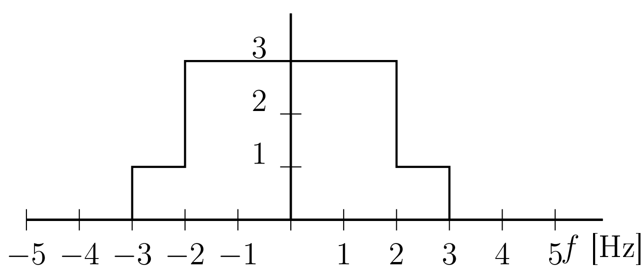
$0 < E_x < \infty$, joten $x(t)$ on energiasignaali ja $P_x = 0$.

(b) Kaava C6

$$r_{xx}[m] = \{\underset{\uparrow}{-i}, 2, 1\} * \{1, 2, \underset{\uparrow}{i}\} = \{-i, 2-2i, \underset{\uparrow}{6}, 2+2i, i\}.$$

$E_x = r_{xx}[0] = 6$.

2. Analogisesta signaalista $x(t)$ otetaan näytteitä $T = 0.2$ sekunnin välein.
   (a) Mikä on näytteistystaajuus? (1 p)
   (b) Olkoon $\Delta(t) = \sum_{n-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. Määrää näytejonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t)$ Fourier-muunnos $x(t)$:n Fourier-muunnoksen $X(f)$ avulla. (2 p)
   (c) Olkoon $X(f)$ on esitettynä alla olevassa kuvassa. Piirrä näytejonon $\hat{x}(t)$ amplitudispektri välillä $[-5, 5]$ Hz. Tapahtuuko laskostumista? Mikä on signaalin $x(t)$ Nyquistin taajuus ja miten se liittyy näytteistykseen? (3 p)



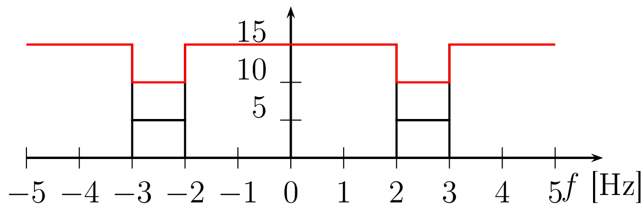
Ratkaisu.

(a) $f_s = \frac{1}{0.2\ \mathrm{s}} = 5$ Hz.

(b) Koska $x(t)\Delta(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$, kaavoilla A12 ja B17 saadaan

$$\hat{X}(f) = X(f) * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{k}{T}) = 5\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f-k5)$$

(c) Nyquistin taajuus $f_N = 2f_c$, missä f_c on signaalin korkein taajuuskomponentti, on alipäästösignaalin pienin näytteistystaajuus, jolla laskostumista ei tapahdu ja rekonstruktio on mahdollinen. Tässä tehtävässä $f_N = 2 \cdot 3$ Hz $= 6$ Hz.



Laskostuminen tapahtuu taajuuksilla 2-3 Hz, koska $f_s = 5$ Hz $\not\geq 6$ Hz.

3. Analoginen LTI-systeemi on määritelty differentiaaliyhtälöllä

$$y'(t) + 5y(t) = 3x(t-2), \quad t \geq 0$$

alkuehdoilla $y(0) = 0$, $x(t) = 0$, $t \leq 0$, missä $x(t)$ on heräte ja $y(t)$ vaste. Määrää systeemin siirtofunktio ja impulssivaste. Onko systeemi kausaalinen? Määrää amplitudi- ja vaihevaste.

Ratkaisu. Fourier-muuntamalla kaavoilla A4 ja A8

$$i2\pi fY(f) + 5Y(f) = 3X(f)e^{-i2\pi f\cdot 2}$$

Siirtofunktio

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \underbrace{\frac{3}{5+i2\pi f}}_{\leftrightarrow 3e^{-5t}u(t)} e^{-i2\pi f\cdot 2}$$

impulssivaste kaavoilla A4 ja B3

$$h(t) = 3e^{-5(t-2)}u(t-2)$$

amplitudivaste

$$|H(f)| = \frac{3}{\sqrt{25+4\pi^2 f^2}}$$

vaihevaste

$$\arg H(f) = -\arctan\frac{2\pi f}{5} - 4\pi f$$

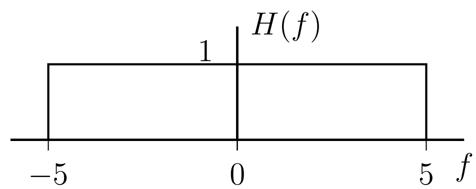
Systeemi on kausaalinen, koska $h(t) = 0$, $t < 0$.

4. Tarkastellaan DSB-amplitudimodulaatiosignaalia $x(t) = m(t)\cos 2\pi f_c t$, missä kantoaaltotaajuus $f_c = 10$.

(a) Olkoon sanomasignaali $m(t) = 2\,\mathrm{sinc}^2\, t$. Määrää ja piirrä signaalien $m(t)$ ja $x(t)$ amplitudispektrit. (4 p)

(b) Olkoon edelleen $y(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t$. Piirrä signaalin $y(t)$ amplitudispektri. (1 p)

(c) Olkoon $z(t)$ allaolevan kuvan alipäästösuodattimen vaste, kun heräte on $y(t)$. Piirrä signaalin $z(t)$ amplitudispektri. Minkä signaalin sait? (1 p)



Ratkaisu.

(a)

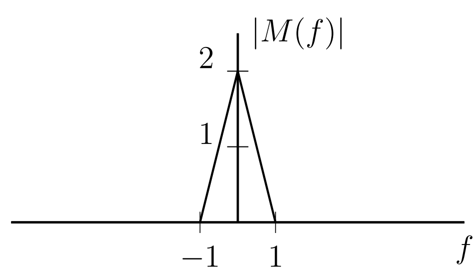
$$M(f) = 2\,\mathrm{tri}(f) \qquad \text{(B7)}$$

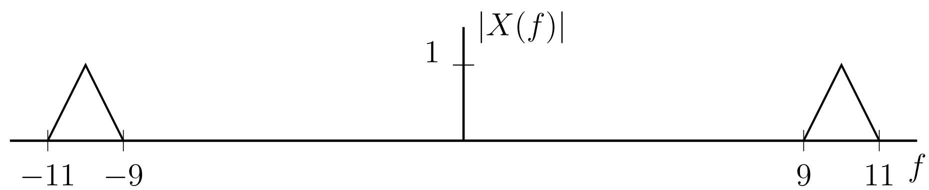
$$X(f) = \mathcal{F}\{m(t)\} * \mathcal{F}\{\cos 2\pi f_c t)\} = M(f) * \frac{1}{2}[\delta(f-10) + \delta(f+10)] \qquad \text{(A11,B12)}$$

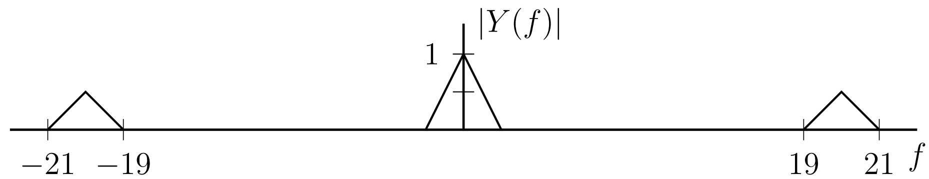
$$= \frac{1}{2}M(f-10) + \frac{1}{2}M(f+10) = \mathrm{tri}(f-10) + \mathrm{tri}(f+10) \qquad \text{(G6)}$$

(b) $Y(f) = \frac{1}{2}X(f-10) + \frac{1}{2}X(f+10) = \frac{1}{2}\mathrm{tri}(f-20) + \mathrm{tri}(f) + \frac{1}{2}\mathrm{tri}(f+20)$ (vrt. a))

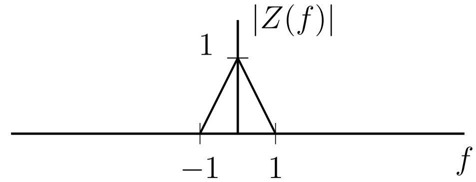
(c) $Z(f) = H(f)Y(f) = \mathrm{tri}(f)$. Saatu signaali on $z(t) = \frac{1}{2}m(t)$.
Amplitudispektrit:







|Y(f)|
1
−21
−19
19
21
f



|Z(f)|
1
−1
1
f