Signaalianalyysi 031080A

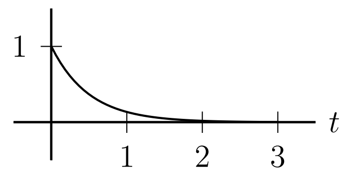
1. välikoe 25.11.2019 Välivaiheet ja perustelut näkyviin!

1. (a) Piirrä signaalin $x(t) = e^{-2t}u(t)u(3-t)$, $t \in \mathbb{R}$ kuvaaja ja tutki laskemalla, onko kyseinen signaali energia- vai tehosignaali.

Ratkaisu. Kaava H1

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2t}u(t)u(3-t)|^2 dt = \int_0^3 e^{-4t}\, dt = \Big/_{0}^{3} -\frac{1}{4}e^{-4t} = \frac{1-e^{-12}}{4}$$

$0 < E_x < \infty$, joten $x(t)$ on energiasignaali ja $P_x = 0$.



(b) Laske signaalin $x[n] = \{\underset{\uparrow}{i}, 2, -1\}$ energia E_x ja autokorrelaatio $r_{xx}[m]$, kun $i^2 = -1$.

Ratkaisu. Kaava C6

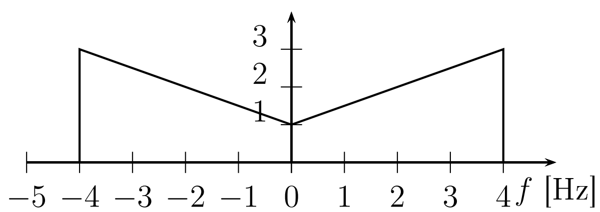
$$r_{xx}[m] = \{-1, 2, \underset{\uparrow}{-i}\} * \{\underset{\uparrow}{i}, 2, -1\} = \{-i, -2+2i, \underset{\uparrow}{6}, -2-2i, i\}.$$

$E_x = r_{xx}[0] = 6$.

2. (a) Analogisen signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos $X(f)$ on piirretty alla olevaan kuvaan. Mikä on signaalin Nyquistin taajuus? Kirjoita impulssijonon

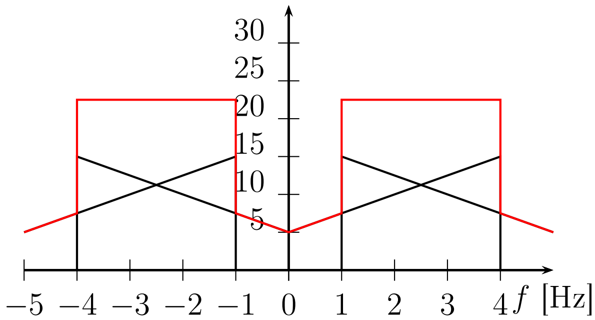
$$x(t)\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$$

Fourier-muunnos $X(f)$:n avulla, kun $T = 0.2$ s, ja piirrä amplitudispektri välillä $[-5, 5]$ Hz. Tapahtuuko laskostumista?



Ratkaisu. Nyquistin taajuus on $f_N = 2f_c = 8$, missä f_c on korkein taajuuskomponentti. Koska $x(t)\Delta(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$, kaavoilla A12 ja B17 saadaan

$$\hat{X}(f) = X(f) * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f - \frac{k}{T}) = 5\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k5)$$

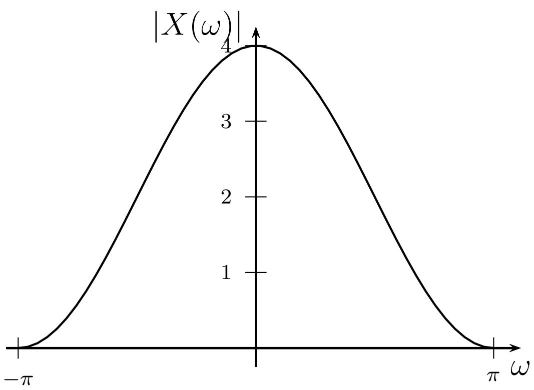


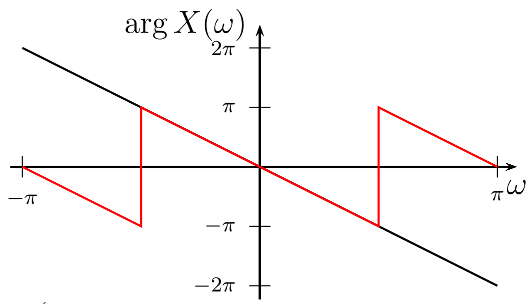
Laskostuminen tapahtuu taajuuksilla 1-4 Hz, koska $f_s = 5$ Hz $\ngeq 8$ Hz.

(b) Olkoon $x[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 1\}$. Määrää signaalin $x[n]$ aikadiskreetti Fourier-muunnos (Fourier-summamuunnos, DTFT) $X(\omega)$. Määrää ja piirrä amplitudispektri ja vaihespektri.

Ratkaisu. Kaava H12

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= e^{-i\omega} + 2e^{-i2\omega} + e^{-i3\omega} = e^{-i2\omega}(e^{i\omega} + 2 + e^{i\omega}) = e^{-i2\omega}(2 + 2\cos\omega) \\
|X(\omega)| &= |e^{-i2\omega}||2 + 2\cos\omega| = 2 + 2\cos\omega \\
\arg X(\omega) &= \arg e^{-i2\omega} + \arg(2 + 2\cos\omega) = -2\omega.
\end{aligned}
$$



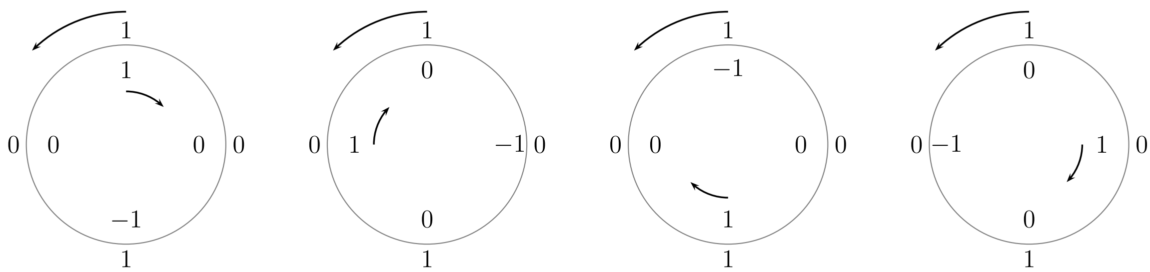


(jompikumpi vaihespektrin kuvaaja riittää)

3. Olkoon $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 0\}$ ja $y[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, 0\}$. Laske syklinen (sirkulaarinen) konvoluutio $x[n] \circledast y[n]$

(a) aika-alueessa (käytä tarvittaessa apuympyröitä)

Ratkaisu. Merkitään $z[n] = x[n] \circledast y[n]$



$z[0] = 0$ $\quad$ $z[1] = 0$ $\quad$ $z[2] = 0$ $\quad$ $z[3] = 0$

(b) käyttäen 4 pisteen diskreettiä Fourier-muunnosta (DFT).

Ratkaisu. H10: $X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]W^{kn}$, missä $W = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

$$\begin{aligned} X[0] &= 1+0+1+0 = 2 \\ X[1] &= 1+0(-i)+1\cdot(-1)+0i = 0 \\ X[2] &= 1-0+1-0 = 2 \\ X[3] &= \overline{X[1]} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y[0] &= 1+0-1+0 = 0 \\ Y[1] &= 1+0(-i)-1\cdot(-1)+0i = 2 \\ Y[2] &= 1-0-1-0 = 0 \\ Y[3] &= \overline{Y[1]} = 2. \end{aligned}$$

$Z[k] = \{\underset{\uparrow}{2}, 0, 2, 0\} \cdot \{\underset{\uparrow}{0}, 2, 0, 2\} = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 0, 0\}$. Kaavalla H11

$$z[n] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} Z[k]W^{-nk} = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 0, 0\}.$$

4. Analoginen LTI-systeemi on määritelty differentiaaliyhtälöllä

$$y'(t) + 5y(t) = 3x(t-2), \quad t \geq 0$$

alkuehdoilla $y(0) = 0$, $x(t) = 0$, $t \leq 0$, missä $x(t)$ on heräte ja $y(t)$ vaste. Määrää systeemin siirtofunktio ja impulssivaste. Onko systeemi kausaalinen? Määrää amplitudi- ja vaihevaste.

Ratkaisu. Fourier-muuntamalla kaavoilla A4 ja A8

$$i2\pi f Y(f) + 5Y(f) = 3X(f)e^{-i2\pi f\cdot 2}$$

Siirtofunktio

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \underbrace{\frac{3}{5+i2\pi f}}_{\leftrightarrow 3e^{-5t}u(t)} e^{-i2\pi f\cdot 2}$$

impulssivaste kaavoilla A4 ja B3

$$h(t) = 3e^{-5(t-2)}u(t-2)$$

amplitudivaste

$$|H(f)| = \frac{3}{\sqrt{25+4\pi^2 f^2}}$$

vaihevaste

$$\arg H(f) = -\arctan\frac{2\pi f}{5} - 4\pi f$$

Systeemi on kausaalinen, koska $h(t) = 0$, $t < 0$.