Signaalianalyysi 031080A

2. välikoe 18.12.2019 Välivaiheet ja perustelut näkyviin!

1. Lineaarista aikainvarianttia systeemiä kuvaa differenssiyhtälö

$$y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + x[n],$$

missä $x[n]$ on heräte ja $y[n]$ on vaste. Määrää systeemin siirtofunktio ja tutki onko systeemi stabiili. Määrää systeemin taajuusvastefunktio, amplitudivaste ja vaihevaste. Määrää vasteen tehotiheysspektri, kun heräte on diskreettiä valkoista kohinaa, jonka varianssi on 5.

Ratkaisu. $\mathcal{Z}$-muuntamalla

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{3}Y(z)z^{-1} + X(z) \\ (1-\frac{1}{3}z^{-1})Y(z) &= X(z) \\ \Rightarrow \quad H(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Ainut napa $z - \frac{1}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{3}$ on kompleksitason yksikköympyrän sisällä, joten systeemi on stabiili. Taajuusvastefunktio

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{i\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-i\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}\cos(\omega) + i\frac{1}{3}\sin(\omega)}$$

Amplitudivaste

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{3}\cos(\omega))^2 + (\frac{1}{3}\sin(\omega))^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos\omega}}$$

Vaihevaste

$$\arg H(\omega) = -\arctan\frac{\frac{1}{3}\sin(\omega)}{1-\frac{1}{3}\cos(\omega)}$$

Jos $S_X(\omega) = 5$, niin

$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = \frac{5}{(1-\frac{1}{3}\cos(\omega))^2 + (\frac{1}{3}\sin(\omega))^2} = \frac{5}{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos\omega}.$$

2. Satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssimatriisi on

$$C_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Muodosta X:stä ja Y:stä lineaarisella muunnoksella

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

uudet muuttujat U ja V, jotka ovat korreloimattomia. Anna lineaarisen muunnoksen matriisi A. Mikä on uusien muuttujien kovarianssimatriisi?

Ratkaisu. Ominaisarvot

$$\det(C_{(X,Y)}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \vee \lambda = 4.$$

Ominaisvektorit: $\lambda = 2$

$$(C_{(X,Y)} - 2I)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 4$

$$(C_{(X,Y)} - 4I)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Kirjoitetaan yksikköominaisvektorit $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ ja $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ muunnosmatriisin sarakkeiksi:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uusi kovarianssimatriisi

$$C_{(U,V)} = AC_{(X,Y)}A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Olkoon A ja Θ riippumattomia satunnaismuuttujia. A:n jakauman (piste)todennäköisyysfunktio on annettu oheisessa taulukossa ja Θ noudattaa tasajakaumaa $\mathrm{Tas}(0, 2\pi)$

a_k	-2	-1	1	2
$P(A = a_k)$	0.25	0.3	0.1	0.35

(a) Laske A:n odotusarvo $E(A)$ ja varianssi $D^2(A)$ sekä $E(2^A)$.

(b) Laske signaalin $X(t) = A + \cos(t + \Theta)$ odotusarvofunktio $\mu_X(t)$ ja autokorrelaatiofunktio $R_X(t, t + \tau)$. Onko $X(t)$ stationaarinen?

Ratkaisu.

(a) Odotusarvo

$$E(A) = -2 \cdot 0.25 - 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.35 = 0$$

Varianssi

$$D^2(A) = E(A^2) - 0^2 = 4 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.35 = 2.8$$

funktion 2^A odotusarvo

$$E(2^A) = 2^{-2} \cdot 0.25 + 2^{-1} \cdot 0.3 + 2^1 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.35 = 1.8125$$

(b) Odotusarvofunktio

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[A + \cos(t + \Theta)] = E[A] + E[\cos(t + \Theta)] \\ &= 0 + \int_0^{2\pi} \cos(t + \theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \Big/_{0}^{2\pi} \sin(t + \theta) = \frac{1}{2\pi}(\sin(t + 2\pi) - \sin(t)) = 0\end{aligned}$$

Autokorrelaatiofunktio

$$\begin{aligned}R_X(t, t + \tau) &= E[(A + \cos(t + \Theta))(A + \cos(t + \tau + \Theta))] \\ &= E[A^2] + +E[A]E[\cos(t + \tau + \Theta)] \\ &\quad + E[A]E[\cos(t + \Theta)] + E[\cos(t + \Theta)\cos(t + \tau + \Theta)] \\ &= 2.8 + E[\frac{1}{2}\cos(\tau) + \frac{1}{2}\cos(2t + \tau + 2\Theta)] \\ &= 2.8 + \frac{1}{2}\cos(\tau) + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2t + \tau + 2\Theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta \\ &= 2.8 + \frac{1}{2}\cos(\tau) + \frac{1}{8\pi} \Big/_{0}^{2\pi} \sin(2t + \tau + 2\Theta) \\ &= 2.8 + \frac{1}{2}\cos(\tau).\end{aligned}$$

Odotusarvofunktio ja autokorrelaatiofunktio eivät riipu t:stä, joten $X(t)$ on stationaarinen.

4. Analogisen systeemin siirtofunktio on

$$H(f) = \frac{1}{2 + i2\pi f}.$$

Olkoon heräte on $X(t) = Z(t) + N(t)$, missä signaaliin $Z(t)$ on sekoittunut siitä riippumatonta valkoista kohinaa $N(t)$. Signaalin $Z(t)$ autokorrelaatiofunktio on $R_Z(\tau) = \cos 2\pi\tau$ ja kohinan $N(t)$ tehotiheysspektri on $S_N(f) = 5$.

(a) Määrää herätteen $X(t)$ tehotiheysspektri tarkasti perustellen. (1 p)

(b) Olkoon signaalin $Z(t)$ vaste $Z_o(t)$ ja kohinan $N(t)$ vaste $N_o(t)$. Määrää tehotiheysspektrit $S_{Z_o}(f)$ ja $S_{N_o}(f)$ sekä autokorrelaatiofunktiot $R_{Z_o}(t, t+\tau)$ ja $R_{N_o}(t, t+\tau)$. (4 p)

(c) Määrää signaalikohinasuhde

$$\text{SNR} = \frac{E[Z_o^2(t)]}{E[N_o^2(t)]}.$$

(1 p)

Ratkaisu.

(a) Valkoisen kohinan odotusarvo on nolla, joten koska $Z(t)$ ja $N(t)$ ovat riippumattomat,

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= E[(Z(t) + N(t))(Z(t+\tau) + N(t+\tau))] \\ &= R_Z(\tau) + E[Z(t)]\underbrace{E[N(t+\tau)]}_{=0} + \underbrace{E[N(t))]}_{=0} E[Z(t+\tau)] + R_N(t, t+\tau) \end{aligned}$$

$$S_X(f) = \frac{1}{2}[\delta(f-1) + \delta(f+1)] + 5.$$

(b) $|H(f)|^2 = \dfrac{1}{4 + 4\pi^2 f^2}.$

$$\begin{aligned} S_Z(f) &= \frac{1}{2}[\delta(f-1) + \delta(f+1)] \\ S_{Z_o}(f) &= |H(f)|^2 S_Z(f) = \frac{1}{2}|H(1)|^2\delta(f-1) + \frac{1}{2}|H(-1)|^2\delta(f+1) \\ &= \frac{1}{4+4\pi^2}\frac{1}{2}[\delta(f-1) + \delta(f+1)] \\ R_{Z_o}(\tau) &= \frac{1}{4+4\pi^2}\cos(2\pi\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{N_o}(f) &= |H(f)|^2 S_N(f) = \frac{1}{4+4\pi^2 f^2}\cdot 5 = \frac{5}{4}\frac{2\cdot 2}{2^2 + (2\pi f)^2} \\ R_{N_o}(\tau) &= \frac{5}{4}e^{-2|\tau|} \end{aligned}$$

(c) $\text{SNR} = \dfrac{R_{Z_o}(0)}{R_{N_o}(0)} = \dfrac{\frac{1}{4+4\pi^2}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{5+5\pi^2}$