Laskuharjoitustehtävät 4 syksy 2019

1.-2. (**e**) Vastaukset stackissa.

3. (**p**) Signaalin $m(t)$ Fourier-muunnos on esitetty oheisessa kuvassa.

   a) Määrää signaalin $m(t)$ amplitudispektri ja vaihespektri.

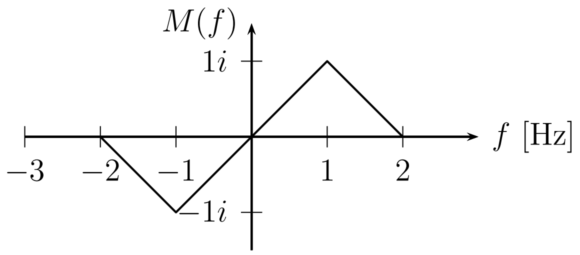
   b) Määrää Hilbert-muunnoksen $\hat{m}(t)$ amplitudispektri ja vaihespektri.

   c) Määrää amplitudimoduloidun signaalin $m(t)\cos 12\pi t$ amplitudispektri.

   d) Määrää signaalin $m(t) + i\hat{m}(t)$ amplitudispektri.

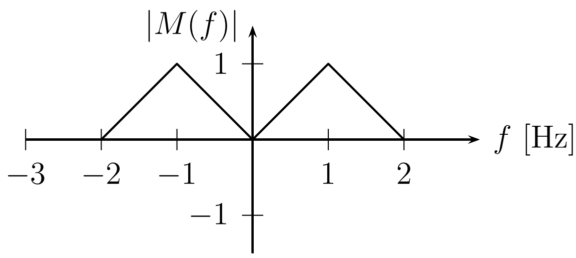
   e) Määrää SSB-signaalin $x_u(t) = m(t)\cos 12\pi t - \hat{m}(t)\sin 12\pi t$ amplitudispektri.

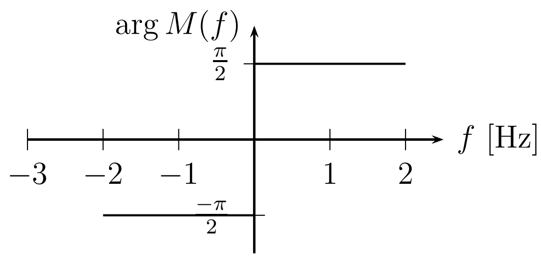
   Osaatko määrätä myös signaalin $m(t)$?



Ratkaisu

a)



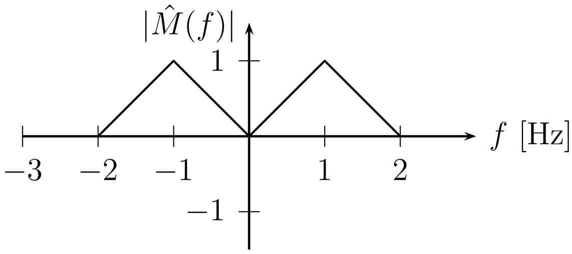


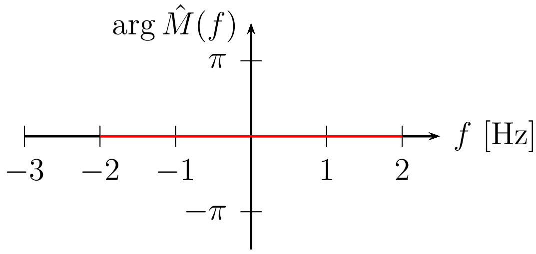
b)

$$\hat{M}(f) = \begin{cases} -i\,\mathrm{sgn}(f)\,M(f), & f > 0 \\ i\,\mathrm{sgn}(f)\,M(f), & f < 0 \end{cases}$$

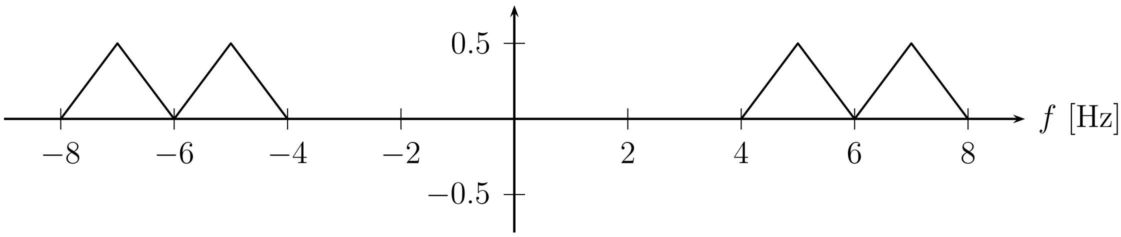
joten $|\hat{M}(f)| = |M(f)|$ ja

$$\arg \hat{M}(f) = \begin{cases} \arg M(f) - \frac{\pi}{2}, & f > 0 \\ \arg M(f) + \frac{\pi}{2}, & f < 0. \end{cases}$$

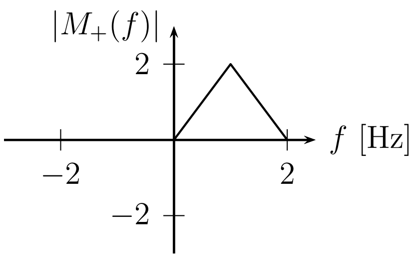




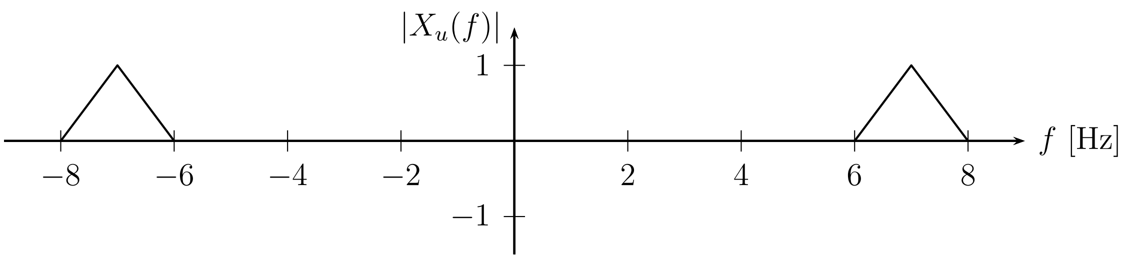
c) $\mathcal{F}\{m(t)\cos 12\pi t\} = M(f) * \frac{1}{2}[\delta(f-6) + \delta(f+6)] = \frac{1}{2}M(f-6) + \frac{1}{2}M(f+6)$



d) $\mathcal{F}\{m_+(t)\} = \mathcal{F}\{m(t) + i\hat{m}(t)\} = \begin{cases} 2M(f), & f > 0 \\ M(f), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$



e) $X_u(f) = \mathcal{F}\{m(t)\cos 12\pi t - \hat{m}(t)\sin 12\pi t\} = \frac{1}{2}M_+(f-6) + \frac{1}{2}\overline{M_+(-f-6)}$
$|X_u(f)| = \frac{1}{2}|M_+(f-6)| + \frac{1}{2}|M_+(-f-6)|$



$M(f) = i\,\mathrm{tri}\,(f-1) - i\,\mathrm{tri}\,(f+1)$, joten

$$m(t) = i\,\mathrm{sinc}^2\,t\,e^{i2\pi t} - i\,\mathrm{sinc}^2\,t\,e^{-i2\pi t} = -2\,\mathrm{sinc}^2\,t\,\frac{e^{i2\pi t} - e^{-i2\pi t}}{2i} = -2\,\mathrm{sinc}^2\,t\,\sin 2\pi t.$$

4. (**p**) Huffman-koodausta käytetään symboleista muodostuvan datajonon mahdollisimman tehokkaaseen binäärikoodaukseen siten, että todennäköisimmät symboli saavat lyhyemmän binäärikoodin kuin epätodennäköiset. Oheisessa taulukossa on esitetty erään datajonon symbolit, vastaavat suhteelliset osuudet sekä Huffman-koodauksen mukainen esitys. Kuinka monta bittiä keskimäärin tarvitaan yhden symbolin koodaamiseen? Mikä on koodisanan pituuden varianssi?

Symboli	suht. osuus	Huffman-koodi
A	36 %	00
B	19 %	010
C	21 %	10
D	3 %	0110
E	20 %	11
F	1 %	0111

<u>Ratkaisu</u>

Merkitään: X =koodisanan pituus.

Odotusarvo

$$\begin{aligned} E(X) = \mu_X &= \sum_k x_k P(X = x_k) \\ &= 2 \cdot (0.36 + 0.21 + 0.20) + 3 \cdot 0.19 + 4 \cdot (0.03 + 0.01) \\ &= 2.27 \end{aligned}$$

Varianssi

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E[(X - \mu_X)^2] \\ &= E(X^2) - \mu_X^2 \\ &= \sum_k x_k^2 P(X = x_k) - \mu_X^2 \\ &= 2^2 \cdot (0.36 + 0.21 + 0.20) + 3^2 \cdot 0.19 + 4^2 \cdot (0.03 + 0.01) - 2.27^2 \\ &= 0.2771 \end{aligned}$$

5. (**n**) Kausaalisen LTI-systeemin vaste on $y[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2\}$ kun heräte on $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, \frac{1}{3}\}$. Määrää systeemin siirtofunktio, impulssivaste ja differenssiyhtälö jonka systeemin heräte ja vaste toteuttavat. Onko systeemi stabiili?

<u>Ratkaisu</u>

Z-muunnetaan signaalit:

$$Y(z) = \mathcal{Z}[y[n]] = \sum_n y[n] z^{-n} = 1 + 2z^{-1}, \quad X(z) = 1 + \frac{1}{3} z^{-1}.$$

Siirtofunktio

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{z + 2}{z + \frac{1}{3}}.$$

$H(z)$:n ainoa napa (nimittäjän nollakohta) $z = -\frac{1}{3}$ on yksikköympyrän sisällä
$\Rightarrow$ Systeemi on stabiili.

Siirtofunktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$H(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} + 2z^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \mathcal{Z}\{(-\frac{1}{3})^n u[n]\} + 2z^{-1}\mathcal{Z}\{(-\frac{1}{3})^n u[n]\} \quad \text{(ks. kaavakok.)},$$

joten impulssivasteeksi saadaan

$$\begin{aligned} h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} &= (-\frac{1}{3})^n u[n] + 2\underbrace{(-\frac{1}{3})^{n-1}}_{-3(-\frac{1}{3})^n} u[n-1] \\ &= (-\frac{1}{3})^n (u[n] - 6u[n-1]). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+2z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \Leftrightarrow (1+\frac{1}{3}z^{-1})Y(z) = (1+2z^{-1})X(z).$$

Z-käänteismuuntamalla saadaan differenssiyhtälö

$$y[n] = -\frac{1}{3}y[n-1] + x[n] + 2x[n-1].$$

6. (**n**) Laske Rayleigh-jakauman Rayleigh(1) odotusarvo ja varianssi.

Ratkaisu

Rayleigh(1)-jakauman tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}, & \text{kun } x \geq 0 \\ 0, & \text{kun } x < 0 \end{cases}.$$

Odotusarvo (käytä osittaisintegrointia)

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = \Big/_{0}^{\infty} -x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

koska L'Hôpitalin säännöllä

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{1}{2}x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{\frac{1}{2}x^2}} = 0$$

ja normaalijakauman perusteella

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = 1.$$

Varianssi (käytä osittaisintegrointia)

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^\infty x^3\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} \\ &= \Big/_{0}^{\infty} -x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} + 2\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} \\ &= -2\Big/_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$