Laskuharjoitustehtävät 3 syksy 2019

1.-2. **(e)** Vastaukset stackissa.

3. **(p)** Olkoon signaalit $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 0\}$ ja $y[n] = \{\underset{\uparrow}{-1}, 1, -1, 1\}$.

   a) Laske signaalien 4 pisteen diskreetit Fourier-muunnokset $X[k]$ ja $Y[k]$.

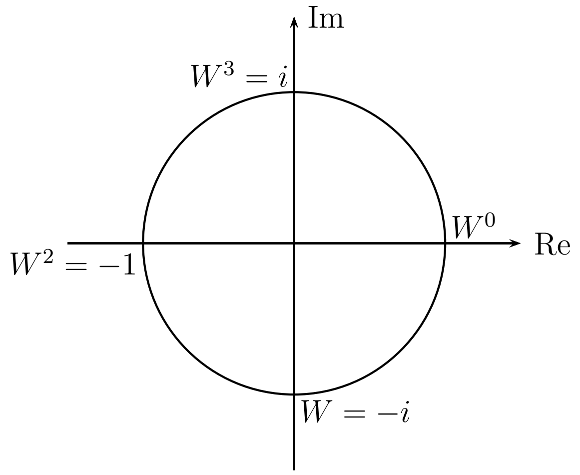
   b) Määrää käänteismuunnoksella signaali $z[n]$, kun sen diskreetti Fourier-muunnos on $Z[k] = X[k]Y[k]$.

Mikä on signaalin $z[n]$ tulkinta?

Ratkaisu Signaalien pituus $N = 4$, joten $W = e^{-i\frac{2\pi}{N}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$. Diskreetti Fourier-muunnos on nyt

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W^{nk} = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-i\frac{\pi}{2}kn}.$$

W:n potenssit on helppoa lukea kompleksitason yksikköympyrän kehältä:



a)

$$\begin{aligned}
X[0] &= 1 + 0 + 1 + 0 = 2 \\
X[1] &= 1 + 0 \cdot (-i) + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot i = 0 \\
X[2] &= 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 2 \\
X[3] &= 1 + 0 \cdot i + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-i) = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y[0] &= -1 + 1 - 1 + 1 = 0 \\
Y[1] &= -1 + 1 \cdot (-i) - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot i = 0 \\
Y[2] &= -1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -4 \\
Y[3] &= -1 + 1 \cdot i - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-i) = 0
\end{aligned}
$$

b) $Z[k] = X[k]Y[k]$.

$$
\begin{aligned}
Z[0] &= X[0]Y[0] = 2 \cdot 0 = 0 \\
Z[1] &= X[1]Y[1] = 0 \cdot 0 = 0 \\
Z[2] &= X[2]Y[2] = 2 \cdot (-4) = -8 \\
Z[3] &= X[3]Y[3] = 0 \cdot 0 = 0,
\end{aligned}
$$

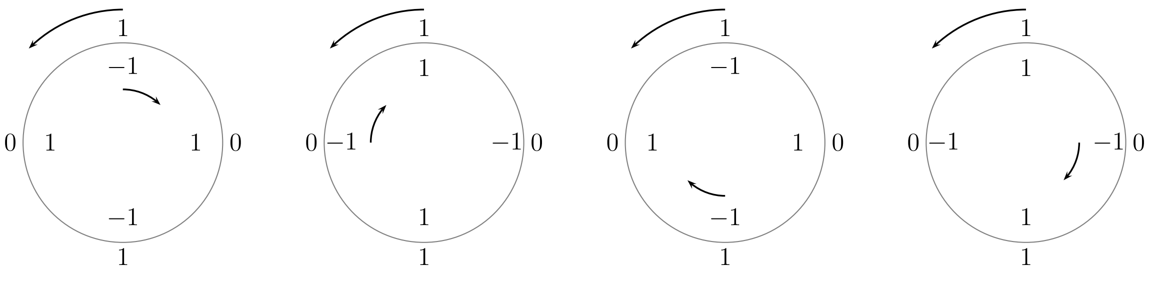
joten $Z[k] = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, -8, 0\}$. Käänteismuunnoksella

$$
z[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Z[k] W^{-nk} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} Z[k] e^{i\frac{\pi}{2}kn}
$$

saadaan

$$
\begin{aligned}
z[0] &= \frac{1}{4}(0 + 0 - 8 + 0) = -2 \\
z[1] &= \frac{1}{4}(0 + 0 - 8 \cdot (-1) + 0) = 2 \\
z[2] &= \frac{1}{4}(0 + 0 - 8 \cdot 1 + 0) = -2 \\
z[3] &= \frac{1}{4}(0 + 0 - 8 \cdot (-1) + 0) = 2.
\end{aligned}
$$

$z[n]$ on signaalien $x[n]$ ja $y[n]$ syklinen konvoluutio, $x[n] \circledast y[n] \leftrightarrow X[k]Y[k]$. Vertailun vuoksi:



$z[0] = -2$ $z[1] = 2$ $z[2] = -2$ $z[3] = 2$

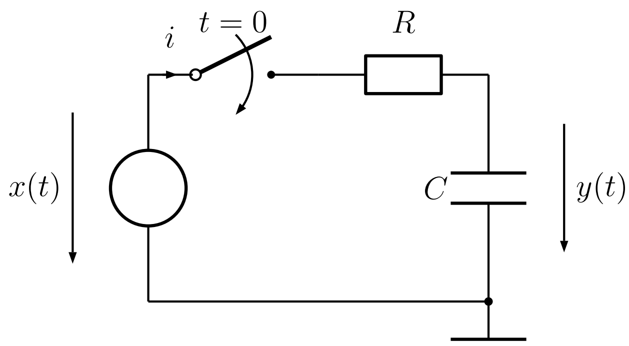
4. **(p)** RC-alipäästösuodatin toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$
y'(t) + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} x(t), \quad t > 0
$$

alkuehdolla $y(0) = 0$, missä jännite $x(t)$ on heräte ja jännite $y(t)$ on vaste.

a) Määrää piirin siirtofunktio.

b) Miten vakio RC on valittava, jotta taajuudella 50 Hz esiintyvän sinimuotoisen häiriön amplitudi pienenisi sadasosaan? Oletetaan, että $t \gg 0$, eli alkuehto ei enää vaikuta.



<u>Ratkaisu</u> Merkitään $\frac{1}{RC} = a$.

a) Fourier-muunnetaan differentiaaliyhtälö:

$$\Rightarrow \qquad i2\pi f Y(f) + aY(f) = aX(f)$$

$$\Rightarrow \text{siirtofunktio} \qquad H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{a}{a + i2\pi f}$$

b) Heräte $x(t) = \sin(2\pi \cdot 50t)$ aiheuttaa vasteen $y(t) = |H(50)| \sin(2\pi \cdot 50t + \theta(50))$, joten vakio voidaan ratkaista yhtälöstä $|H(50)| = \frac{1}{100}$. Amplitudivaste:

$$|H(f)| = \frac{a}{|a + i2\pi f|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

Saadaan

$$\begin{aligned}
|H(50)| &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 \cdot 50^2}} = \frac{1}{100} \qquad |\ (\cdot)^2 \\
\Leftrightarrow 10000a^2 &= a^2 + 10000\pi^2 \\
a^2 &= \frac{10000\pi^2}{9999} \\
a &= \sqrt{\frac{10000}{9999}}\pi \\
RC &= \sqrt{\frac{9999}{10000}}\frac{1}{\pi} \approx 0.3183.
\end{aligned}$$

5. (**n**) Olkoon signaalit $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 0\}$ ja $y[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, 0\}$.

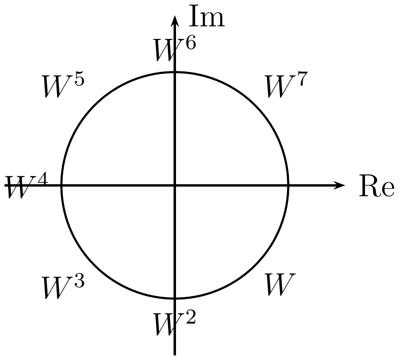
a) Laske signaalien 8 pisteen diskreetit Fourier-muunnokset $X[k]$ ja $Y[k]$.

b) Määrää käänteismuunnoksella signaali $z[n]$, kun sen diskreetti Fourier-muunnos on $Z[k] = X[k]Y[k]$.

Mikä on signaalin $z[n]$ tulkinta?

<u>Ratkaisu</u> Nollilla täydennettyjen signaalien pituus $N = 8$, joten $W = e^{-i\frac{2\pi}{N}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Diskreetti Fourier-muunnos on nyt

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-i\frac{\pi}{4}kn} = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-i\frac{\pi}{4}kn}$$



a)

$$\begin{aligned}
X[0] &= 1 + 0 + 1 + 0 = 2 \\
X[1] &= 1 + 0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} + 1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} + 0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 1 - i \\
X[2] &= 1 + 0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} + 1 \cdot e^{-i\pi} + 0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{2}} = 0 \\
X[3] &= 1 + 0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} + 1 \cdot e^{-i\frac{6\pi}{4}} + 0 \cdot e^{-i\frac{9\pi}{4}} = 1 + i \\
X[4] &= 1 + 0 \cdot e^{-i\pi} + 1 \cdot e^{-i2\pi} + 0 \cdot e^{-i3\pi} = 2 \\
X[5] &= \overline{X[3]} = 1 - i \\
X[6] &= \overline{X[2]} = 0 \\
X[7] &= \overline{X[1]} = 1 + i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y[0] &= 1 + 0 - 1 + 0 = 0 \\
Y[1] &= 1 + 0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} - 1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} + 0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 1 + i \\
Y[2] &= 1 + 0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} - 1 \cdot e^{-i\pi} + 0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{2}} = 2 \\
Y[3] &= 1 + 0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} - 1 \cdot e^{-i\frac{6\pi}{4}} + 0 \cdot e^{-i\frac{9\pi}{4}} = 1 - i \\
Y[4] &= 1 + 0 \cdot e^{-i\pi} - 1 \cdot e^{-i2\pi} + 0 \cdot e^{-i3\pi} = 0 \\
Y[5] &= \overline{Y[3]} = 1 + i \\
Y[6] &= \overline{Y[2]} = 2 \\
Y[7] &= \overline{Y[1]} = 1 - i
\end{aligned}$$

b) $Z[k] = X[k]Y[k] = \{\underset{\uparrow}{2}, 1-i, 2, 1+i, 2, 1-i, 0, 1+i\}\{\underset{\uparrow}{0}, 1+i, 2, 1-i, 0, 1+i, 2, 1-i\} = \{\underset{\uparrow}{0}, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2\}$. Käänteismuunnoksella

$$\begin{aligned} z[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Z[k] e^{i\frac{2\pi nk}{N}} = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} Z[k] e^{i\frac{\pi}{4}kn} = \frac{1}{8}\sum_{l=0}^{3} Z[2l+1] e^{-i\frac{\pi}{4}(2l+1)n} \\ &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}n}}{4}\sum_{l=0}^{3} e^{-i\frac{\pi}{2}ln} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}n}}{4}(1 + e^{-i\frac{\pi}{2}n} + e^{-i\pi n} + e^{-i\frac{3\pi}{2}n}) \end{aligned}$$

saadaan $z[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0\}$.

$z[n] = x[n] \circledast y[n]$, ja koska $N \geq 2L-1 = 7$ missä $L = 4$ on signaalien pituus, $x[n] \circledast y[n] = x[n] * y[n]$. Tarkistus:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -1 & 0 & -1 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

6. (**n**) Sarjaan kytketyn RL-piirin virta $y(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$y'(t) + y(t) = x(t), \ t \geq 0, \ y(0) = 0.$$

Määrää kyseisen LTI-systeemin siirtofunktio ja impulssivaste. Onko systeemi kausaalinen? Laske amplitudivaste ja vaihevaste sekä vaste herätteeseen $x(t) = u(t)$.

Ratkaisu

Fourier-muunnetaan differentiaaliyhtälö:

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow & & i2\pi f Y(f) + Y(f) = X(f) \\ \Rightarrow \text{siirtofunktio} & & H(f) = \dfrac{Y(f)}{X(f)} = \dfrac{1}{1+i2\pi f} \\ & \text{impulssivaste} & h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \mathrm{e}^{-t}u(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \\ & \text{amplitudivaste} & |H(f)| = \dfrac{|1|}{|1+i2\pi f|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4\pi^2 f^2}} \\ & \text{vaihevaste} & \theta(f) = \arg H(f) = \arg 1 - \arg(1+i2\pi f) = -\overline{\mathrm{arc}}\tan(2\pi f) \end{array}$$

Systeemi on kausaalinen, koska $h(t) = 0$ kun $t < 0$.

Askelvasteeksi eli herätteen $x(t) = u(t)$ vasteeksi saadaan

$$\begin{aligned}
y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau \\
&= \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{-\tau} d\tau = \Big/_{0}^{t} - \mathrm{e}^{-\tau} = 1 - \mathrm{e}^{-t}, \quad t \geq 0 \\
y(t) &= 0, \quad t < 0 \\
\Rightarrow y(t) &= (1 - \mathrm{e}^{-t}) u(t).
\end{aligned}$$