Laskuharjoitustehtävät 2 syksy 2019

1. Esitehtävä: Vastaukset stackissa
2. Esitehtävä: Vastaukset stackissa
3. Analogisesta signaalista $x(t) = \sin(2500\pi t)$, missä t on aika sekunteina, otetaan näytteitä 1 millisekunnin välein.

   a) Tapahtuuko laskostumista?

   b) Jos laskostumista tapahtuu, miksi taajuudeksi signaali tulkitaan, ts. mille taajuudelle se laskostuu?

   c) Mikä olisi riittävä näytteenottotaajuus laskostumisen estämiseksi?

   d) Piirrä signaalin $x(t)$ amplitudispektrin kuvaaja.

<u>RATKAISU</u>
Analoginen signaali $x(t) = \sin(2500\pi t) = \sin(2\pi \cdot 1250t)$.
Näytteenottoväli $T = 0.001$s, näytteenottotaajuus $f_s = \frac{1}{0.001\ s} = 1000$Hz.

a) Laskostuminen tapahtuu, koska näytteistystaajuus
$f_s = 1000$ Hz $\ngeq f_N = 2f_c = 2 \cdot 1250$ Hz $= 2500$ Hz.

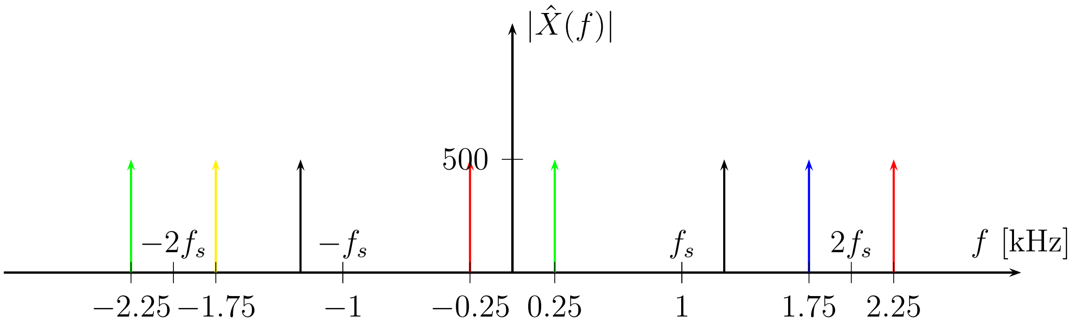
b) Signaali tulkitaan taajuudeksi 250 Hz $\in [0, \frac{f_s}{2}]$, koska

$$\begin{aligned} x(t)|_{t=0.001n} &= \sin(2\pi \cdot 1250t)|_{t=\frac{n}{1000}} = \sin(\frac{5\pi}{2}n) \\ &= \sin(\frac{5\pi}{2}n - 2\pi n) = \sin(\frac{\pi}{2}n), \end{aligned}$$

mutta toisaalta myös

$$\sin(2\pi \cdot 250t)|_{t=\frac{n}{1000}} = \sin(\frac{\pi}{2}n).$$

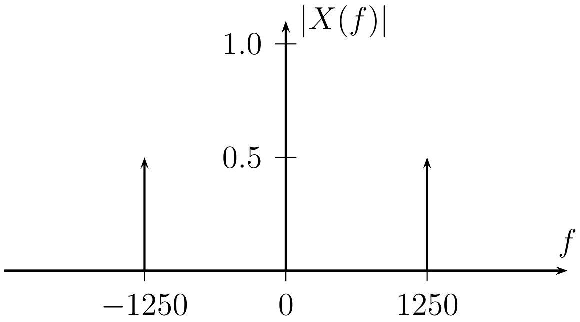
Vaihtoehtoisesti taajuusalueessa tarkasteltuna alkuperäinen spektri kopioituu 1000 hertsin välein (kuvassa kopiot on piirretty eri värein).



c) Riittävä näytteistystaajuus olisi Nyquistin taajuus $f_N = 2 \cdot 1250$ Hz$= 2500$ Hz.

d) Fourier-muunnos (kaavakokoelma B13)

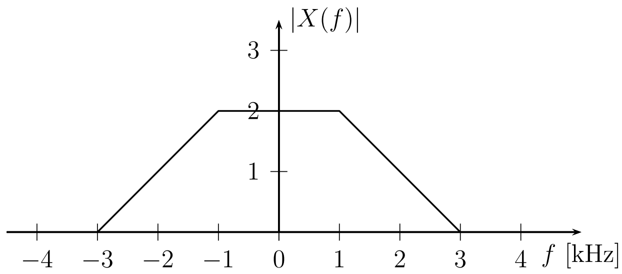
$$X(f) = \frac{1}{2i}[\delta(f-1250) - \delta(f+1250)]$$
$$\Rightarrow |X(f)| = \frac{1}{2}[\delta(f-1250) + \delta(f+1250)]$$



4. Parillisen analogiasignaalin $x(t)$ amplitudispekti on kuvion mukainen. Piirrä $x(t)$:stä otetun näytejonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ amplitudispektri, kun näytteenottoväli on

(a) $T = 0.1$ ms (b) $T = 0.2$ ms.

Mikä on signaaliin liittyvä kriittinen näytteenottotaajuus eli ns. Nyquistin taajuus? Miltä näytejonon $\hat{x}(t)$ Fourier-muunnos näyttää, kun näytteenottotaajuus on Nyquistin taajuus?



Ratkaisu

Näytteenotossa signaali $x(t)$ kerrotaan impulssijonolla $\Delta(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$,

$$\hat{x}(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT),$$

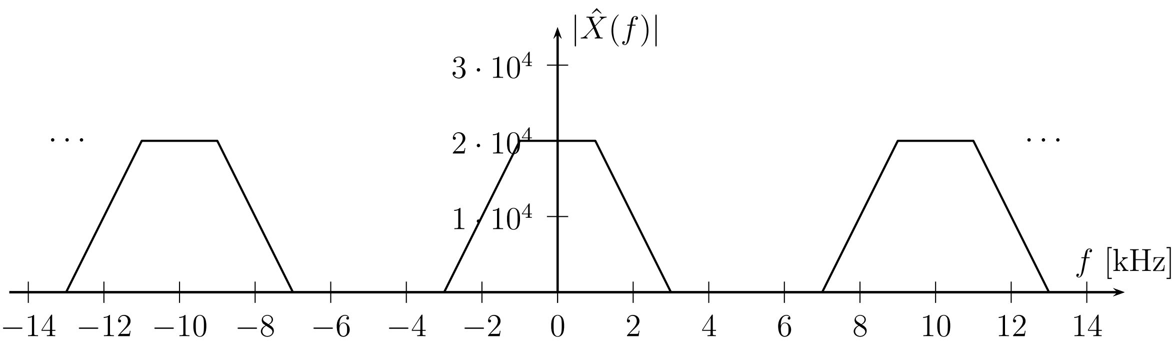
missä T on näytteenottoväli. Koska tulon Fourier-muunnos on Fourier-muunnosten konvoluutio,

$\cdots$ $\cdots$

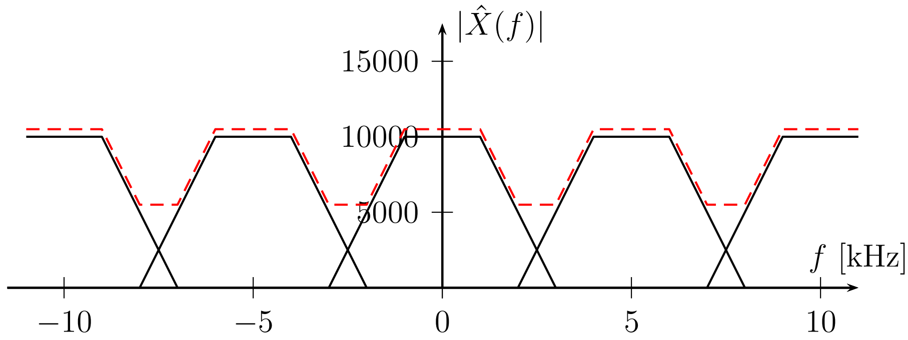
saadaan (kaavoista A11 ja B17)

$$\begin{aligned}\hat{X}(f) &= X(f) * \mathcal{F}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\}\\ &= X(f) * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-\frac{k}{T})\\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f-\frac{k}{T})\\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f-\frac{k}{T})\end{aligned}$$

a) $T = \frac{1}{10000}$:



b) $T = \frac{1}{5000}$:



Parillisen signaalin Fourier-muunnos on reaalinen ja parillinen, joten päällekkäin menevät osat ovat saman merkkisiä ja summautuvat amplitudispektrissä.

Kriittisellä näytteenottotaajuudella (Nyquistin taajuudella) kopiot sivuavat toisiaan, mutta eivät mene päällekkäin (laskostu). Tässä Nyquistin taajuus on

$$f_s = 2f_c = 6\text{kHz},$$

mihin suurin taajuuskomponentti $f_c = 3$kHz luetaan $x(t)$:n amplitudispektristä.

5. Olkoon $x(t) = \text{sinc}(2t)\cos(6\pi t)$, missä t on aika sekunteina. Piirrä kuva näytejonosta $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t)$ ja amplitudispektristä $|\hat{X}(f)|$, kun signaali näytteistetään taajuudella

   a) $f_s = 4$ Hz

   b) $f_s = 10$ Hz.

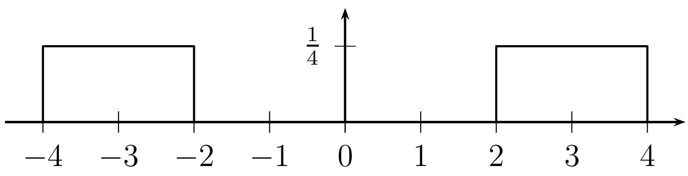
Tapahtuuko laskostumista? Määrää signaalin Nyquistin näytteenottotaajuus.

Määrää signaalin $x(t) = \mathrm{sinc}(2t)\cos(10\pi t)$ Nyquistin näytteenottotaajuus. Tapahtuuko laskostumista, jos signaali näytteistetään taajuudella $f_s = 8$?

<u>RATKAISU</u> Lasketaan amplitudispektri: kaavakokoelman avulla

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{f}{2}) * \frac{1}{2}[\delta(f-3) + \delta(f+3)] \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{rect}(\frac{f-3}{2}) + \frac{1}{4}\mathrm{rect}(\frac{f+3}{2}) \end{aligned}$$

Amplitudispektrin $|X(f)|$ kuvaaja:



Näytejonon

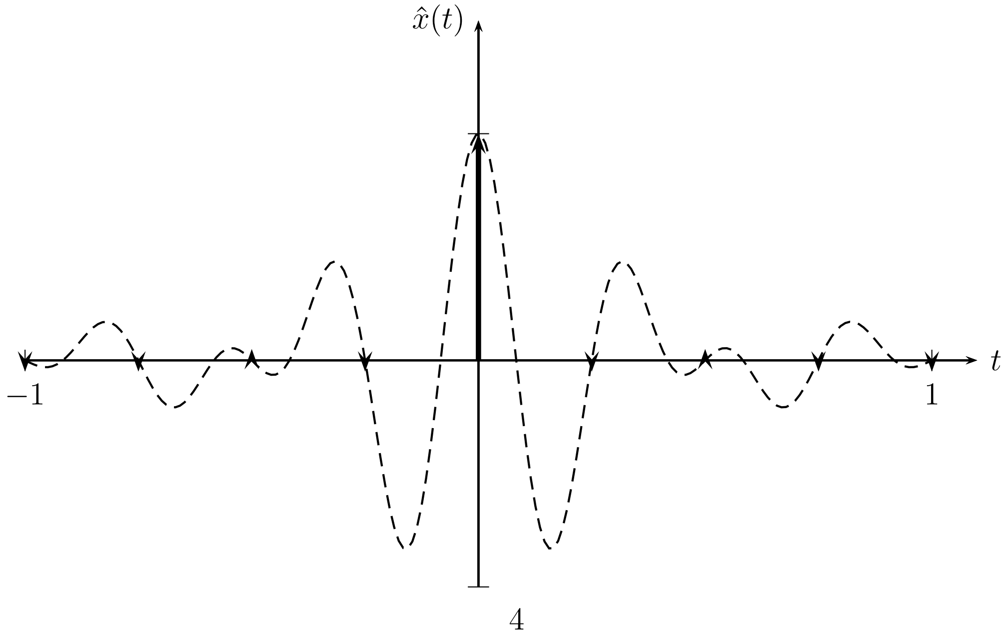
$$\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$$

Fourier-muunnos on

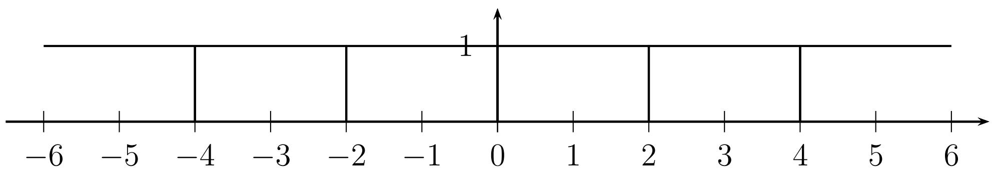
$$\hat{X}(f) = X(f) * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f - \frac{k}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f - \frac{k}{T})$$

a) $T = \frac{1}{4}$ s

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\mathrm{sinc}(2\cdot\frac{1}{4}n)}_{=0,\ n=\pm2,\pm4,\ldots}\underbrace{\cos(6\pi\cdot\frac{1}{4}n)}_{=0,\ n=\pm1,\pm3,\ldots}\delta(t - \frac{1}{4}n) = \delta(t)$$



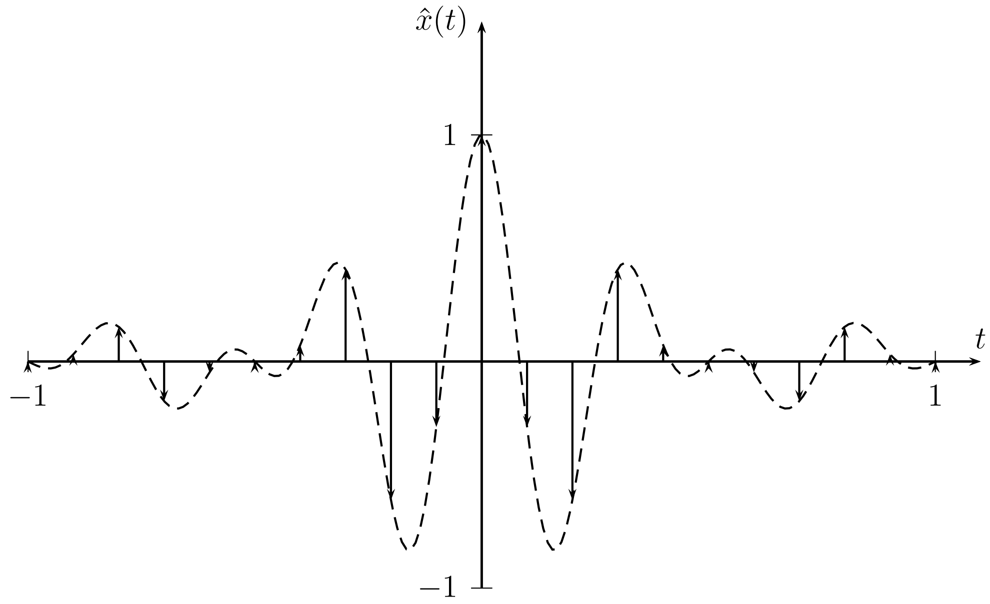
Näytejonon amplitudispektri: $\hat{X}(f) = 1$



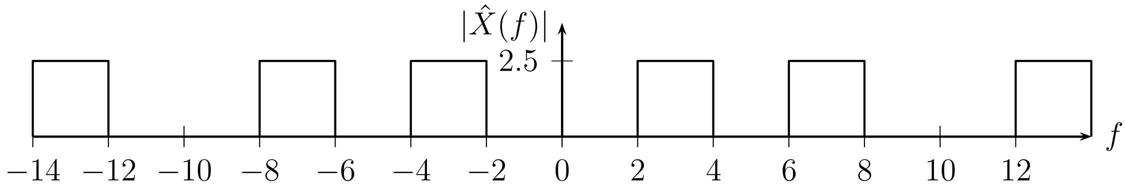
Alueelle $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}] = [-2, 2]$ laskostuu kopioita.

b) $T = \frac{1}{10}$ s

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(2 \cdot \frac{1}{10}n) \cos(6\pi \cdot \frac{1}{10}n)\delta(t - \frac{1}{10}n)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\frac{n}{5}) \cos(\frac{3\pi n}{5})\delta(t - \frac{n}{10})$$



Näytejonon amplitudispektri:



Alueelle $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}] = [-5, 5]$ ei laskostu kopioita.

Suurin taajuus on $f_c = 4$ Hz, joten Nyquistin taajuus on $2f_c = 8$ Hz, jolloin kuvio kopioituu 8 yksikön välein. Tällöin kuviossa ei tapahdu laskostumista.

6. Laske Fourier-muunnoksen avulla signaalin $x(t) = \mathrm{e}^{-2t}u(t)$ autokorrelaatiofunktio $r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)}x(t+\tau)\,dt$.

<u>Ratkaisu</u>

Koska

$$\begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)}x(t+\tau)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(\tau-(-t))\mathrm{d}t \\ &= x(\tau) * x(-\tau), \end{aligned}$$

niin kaavan A12 avulla voidaan autokorrelaatiofunktio ratkaista Fourier-muunnoksilla:

$$\mathcal{F}\{x(\tau) * x(-\tau)\} = \mathcal{F}\{x(\tau)\} \cdot \mathcal{F}\{x(-\tau)\},$$

jossa kaavan B3 avulla

$$\mathcal{F}\{x(\tau)\} = \mathcal{F}\{\,\mathrm{e}^{-2\tau}u(\tau)\} = \frac{1}{2+i2\pi f}$$

ja edelleen kaavan A2 avulla

$$\mathcal{F}\{x(-\tau)\} = \frac{1}{2-i2\pi f}.$$

Siten

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(-\tau)\} \cdot \mathcal{F}\{x(\tau)\} &= \frac{1}{2+i2\pi f} \cdot \frac{1}{2-i2\pi f} = \frac{1}{4+4\pi f} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2\cdot 2}{2^2+(2\pi f)^2}, \end{aligned}$$

josta käänteismuunnoksella (kaava B4) saadaan

$$r_{xx}(\tau) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2|\tau|}.$$