Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 1 syksy 2019

1. Esitehtävä: Vastaukset stackissa

2. Esitehtävä: Vastaukset stackissa

3. Määritellään signaalit $x[n] = \{2, \underset{\uparrow}{1}, 0, -2\}$ ja $y[n] = \{2 \underset{\uparrow}{+} i, 2, 3-2i\}$.

   (a) Laske autokorrelaatiot $r_{xx}[l]$ ja $r_{yy}[l]$ sekä signaalien energiat E_x ja E_y.

   (b) Laske ristikorrelaatiot $r_{xy}[l]$ ja $r_{yx}[l]$. Minkä säännön ristikorrelaatio toteuttaa?

   <u>Ratkaisu</u>

   Lasketaan autokorrelaatio

$$r_{xx}[n] = \overline{x[-n]} * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{x[k]} x[k+n]$$

   ja ristikorrelaatio

$$r_{xy}[n] = \overline{x[-n]} * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{x[k]} y[k+n]$$

   alekkainkertolaskulla, siten että

   1° jos summa tai tulo ≥ 10 niin sitä ei merkitä muistiin

   2° nollaindeksin paikka $\uparrow$ määrätään kuten desimaalipilkun paikka

   a) $r_{xx}[l] = x[-n] * x[n] = \{-2, 0, \underset{\uparrow}{1}, 2\} * \{2, \underset{\uparrow}{1}, 0, -2\} = \{-4, -2, 2, \underset{\uparrow}{9}, 2, -2, -4\}$,

   $E_x = r_{xx}[0] = 9$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & -2 & 0 & 1 & 2 \\
 & & & 2 & 1 & 0 & -2 \\
\cline{4-7}
 & & & 4 & 0 & -2 & -4 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & -2 & 0 & 1 & 2 & & \\
-4 & 0 & 2 & 4 & & & \\
\hline
-4 & -2 & 2 & 9 & 2 & -2 & -4
\end{array}$$

   $r_{yy}[n] = \overline{y[-n]} * y[n] = \{3+2i, 2, 2 \underset{\uparrow}{-} i\} * \{2 \underset{\uparrow}{+} i, 2, 3-2i\}$

   $= \{4+7i, 10+6i, \underset{\uparrow}{22}, 10-6i, 4-7i\}$,

   $E_y = r_{yy}[0] = 22$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 3+2i & 2 & 2-i \\
 & & 2+i & 2 & 3-2i \\
\cline{3-5}
 & & 13 & 6-4i & 4-7i \\
 & 6+4i & 4 & 4-2i & \\
4+7i & 4+2i & 5 & & \\
\hline
4+7i & 10+6i & 22 & 10-6i & 4-7i
\end{array}$$

b) $r_{xy}[n] = \overline{x[-n]} * y[n] = \{-2, 0, 1, \underset{\uparrow}{2}\} * \{2 \underset{\uparrow}{+} i, 2, 3-2i\}$
$= \{-4-2i, -4, -4 \underset{\uparrow}{+} 5i, 6+2i, 7-2i, 6-4i\}.$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2 & 0 & 1 & 2 \\
 & & & 2+i & 2 & 3-2i \\
\cline{3-6}
 & & -6+4i & 0 & 3-2i & 6-4i \\
 & -4 & 0 & 2 & 4 & \\
-4-2i & 0 & 2+i & 4+2i & & \\
\hline
-4-2i & -4 & -4+5i & 6+2i & 7-2i & 6-4i
\end{array}$$

Koska ristikorrelaatiofunktio on konjugaattisymmetrinen, niin
$r_{yx}[n] = \overline{y[-n]} * x[n] = \overline{r_{xy}[-n]} = \{6+4i, 7+2i, 6-2i, -4 \underset{\uparrow}{-} 5i, -4, -4+2i\}.$

4. Määritellään jatkuva-aikaiset signaalit $x(t) = \mathrm{e}^t u(t)$ ja $y(t) = \mathrm{e}^{-2t} u(t)$. Laske konvoluution $z(t) = x(t) * y(t)$ arvo
(a) hetkellä 1
(b) hetkellä -1
(c) hetkellä $t \in \mathbb{R}$.

<u>Ratkaisu</u>

a)

$$z(1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\tau} u(\tau)\, \mathrm{e}^{-2(1-\tau)} u(1-\tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2+3\tau} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{3}(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-2})$$

b) $z(-1) = 0$

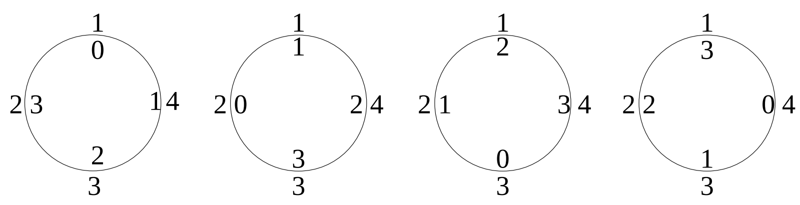
c) Kun $t < 0$, niin $z(t) = 0$. Kun $t \geq 0$,

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\tau} u(\tau)\, \mathrm{e}^{-2(t-\tau)} u(t-\tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^{-2t+3\tau} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-2t}).$$

Siis $z(t) = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-2t}) u(t)$.

5. Laske signaalien $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$ ja $y[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3\}$ syklinen konvoluutio $x[n] \circledast y[n]$ ja konvoluutio $x[n] * y[n]$.

<u>Ratkaisu</u>
Syklisen konvoluution $x[n] \circledast y[n]$ laskenta:



16 18 16 10

$\Rightarrow \quad x[n] \circledast y[n] = \{\underset{\uparrow}{16}, 18, 16, 10\}.$

Konvoluutio $x[n] * y[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\} * \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3\} = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 10, 16, 17, 12\}$.

			1	2	3	4
			0	1	2	3
			3	6	9	12
		2	4	6	8	
	1	2	3	4		
0	0	0	0			
0	1	4	10	16	17	12

6. Laske signaalien $x_z[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0\}$ ja $y_z[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 0\}$ syklinen konvoluutio $x_z[n] \circledast y_z[n]$. Voit käyttää esim. Matlabia. Mitä huomaat, kun vertaat edelliseen tehtävään?

<u>Ratkaisu</u>

Signaalien $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0\}$ ja $y_z[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 0\}$ syklisen konvoluution $x_z[n] \circledast y_z[n]$ laskenta:

$\Rightarrow \; x_z[n] \circledast y_z[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 10, 16, 17, 12, 0\}$. Matlabilla:

```
>> x=[1 2 3 4];
>> y=[0 1 2 3];
>> z=cconv(x,y,8)

z =

0     1.0000     4.0000    10.0000    16.0000    17.0000    12.0000          0
```

Kun $x_z[n]$ ja $y_z[n]$ muodostetaan lisäämällä riittävästi (pituudeksi tultava vähintään alkuperäisten signaalien pituuksien summa-1) nollia $x[n]$:n ja $y[n]$:n loppuun, on voimassa

$$x_z[n] \circledast y_z[n] = x[n] * y[n].$$