Signaalianalyysi 031080A

2. välikoe 17.12.2018

1. (a) Laske muuttujan X odotusarvo $E(X)$ ja varianssi $D^2(X)$, kun X:n tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

   (b) Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat -1, 0 ja 1 ja satunnaismuuttujan Y mahdolliset arvot ovat 2, 4 ja 6. Oheisessa taulukossa on esitetty joitakin X:n ja Y:n yhteisjakauman ja Y:n reunajakauman todennäköisyyksiä.

X \ Y	2	4	6
-1	a	$5/25$	$4/25$
0	$2/25$	b	$4/25$
1	$2/25$	$1/25$	c
$P(Y = y_j)$	$1/5$	$2/5$	d

   i. Määrää puuttuvat todennäköisyydet a, b, c ja d.
   ii. Laske ehdollinen todennäköisyys $P(X = 1 | Y = 2)$.
   iii. Ovatko muuttujat X ja Y tilastollisesti riippumattomat?

   Perustele vastauksesi tarkasti.

2. Satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssimatriisi on

$$C_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 3.6 & 0.8 \\ 0.8 & 2.4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Määrää varianssit $D^2(Z)$ ja $D^2(W)$ sekä kovarianssi $\mathrm{Cov}(X, Y)$, kun $Z = X + Y$ ja $W = X - Y$.

   (b) Matriisin $C_{(X,Y)}$ ominaisvektorit ovat

$$s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   missä $s, t \neq 0$. Määrää lineaarinen muunnos $\binom{U}{V} = A\binom{X}{Y}$, jolla uudet muuttujat U ja V ovat korreloimattomat ja toteuttava ehdon $D^2(X) + D^2(Y) = D^2(U) + D^2(V)$. Anna U:n ja V:n kovarianssimatriisi.

3. Olkoon $X(t) = A(t)\cos(6\pi t + \Theta)$, missä $A(t)$ on Θ:sta riippumaton stationaarinen signaali, ja Θ noudattaa tasajakaumaa välillä $(0, 2\pi)$. Määrää $X(t)$:n odotusarvofunktio. Määrää autokorrelaatiofunktio $R_X(t, t + \tau)$ $A(t)$:n autokorrelaatiofunktion $R_A(\tau)$ avulla. Tutki onko signaali stationaarinen.

4. Olkoon $W[n]$ aikadiskreetti nollaodotusarvoinen satunnaissignaali jonka varianssi on 2 kaikilla n. Lisäksi tiedetään, että $W[n]$ ja $W[m]$ ovat riippumattomia aina kun $n \neq m$.

   (a) Laske autokorrelaatiofunktio $R_W[n, n + k]$ ja tehotiheysspektri $S_W(\omega)$. (2 p)

   (b) Olkoon $Z[n] = W[n] - W[n-1]$ (tai vaihtoehtoisesti $Z[n] = W[n] * \{\underset{\uparrow}{1}, -1\}$). Laske autokorrelaatiofunktio $R_Z[n, n + k]$ ja tehotiheysspektri $S_Z(\omega)$. (3 p)

   (c) Ennustetaan $Z[n]$ edeltävän näytteen $Z[n-1]$ avulla muodossa

$$\hat{Z}[n] = h[1]Z[n-1].$$

   Määrää optimaalinen kerroin $h[1]$, joka minimoi estimointivirheen $E\{(\hat{Z}[n] - Z[n])^2\}$. (1 p)