Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 7 syksy 2018

1.-2. (**e**) Vastaukset stackissa.

3. (**p**) a) Stationaarinen satunnaissignaali $X(t)$, jonka autokorrelaatiofunktio on

$$R_X(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2},$$

on herätteenä LTI-systeemissä, jonka impulssivaste on

$$h(t) = 3\sin(\pi t)/(\pi t).$$

Määrää ja hahmottele vasteen $Y(t)$ tehotiheysspektri $S_Y(f)$ sekä ristitehotiheysspektri $S_{XY}(f)$. Ohje: tarvitset kaavakokoelman kaavaa A3.

b) Määrää sellainen kausaalinen LTI-systeemi, jonka vaste on valkoista kohinaa tehotiheydellä 1, kun herätteen $X(t)$ tehotiheysspektri on

$$S_X(f) = 1 + \frac{11}{25+4\pi^2 f^2}.$$

Anna systeemin siirtofunktio $H(f)$ ja impulssivaste $h(t)$. Ohje: kirjoita aluksi herätteen tehotiheysspektri muodossa $S_X(f) = G(f)\overline{G(f)}$, missä $1/G(f)$ on kausaalisen systeemin siirtofunktio.

<u>Ratkaisu:</u>

a) Signaalin $X(t)$ autokorrelaatiofunktio on

$$R_X(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2} = \pi \cdot \frac{2\cdot 2\pi}{(2\pi)^2 + (2\pi\tau)^2},$$

josta kaavojen A3 ja B4 avulla saadaan Fourier-muunnos $S_X(f) = \pi\,\mathrm{e}^{-2\pi|f|}$. Impulssivaste $h(t) = 3\mathrm{sinc}(t)$, josta Fourier-muunnnoksella saadaan $H(f) = 3\mathrm{rect}(f)$. Siten vasteen tehotiheysspektri on (kaava J25)

$$S_Y(f) = |H(f)|^2\, S_X(f) = 9\pi\mathrm{rect}^2(f)\,\mathrm{e}^{-2\pi|f|} = \begin{cases} 9\pi\,\mathrm{e}^{-2\pi|f|}, & |f| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

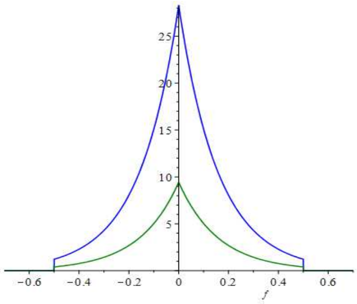
Ristitehotiheysspektri (kaava J27)

$$S_{XY} = H(f)S_X(f) = \begin{cases} 3\pi\,\mathrm{e}^{-2\pi|f|}, & |f| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

b) Vasteen tehotiheys $S_Y(f) = 1$ ja herätteen $S_X(f) = 1 + \frac{11}{25+4\pi^2 f^2} = \frac{36+4\pi^2 f^2}{25+4\pi^2 f^2}$.
Kaavasta J25 saadaan

$$|H(f)|^2 = H(f)\overline{H(f)} = \frac{25+4\pi^2 f^2}{36+4\pi^2 f^2} = \underbrace{\frac{5+i2\pi f}{6+i2\pi f}}_{\text{kaus.}} \cdot \underbrace{\frac{5-i2\pi f}{6-i2\pi f}}_{\text{ei kaus.}}$$

Siis $H(f) = \frac{5+i2\pi f}{6+i2\pi f} = 1 - \frac{1}{6+i2\pi f}$, joten impulssivaste on $h(t) = \delta(t) - \mathrm{e}^{-6t}u(t)$.



Kuva 1: Vasteen tehotiheysspektri $S_Y(f)$ (sininen) ja ristitehotiheysspektri $S_{XY}(f)$ (vihreä).

4.(**p**) Diskreetti LTI-systeemi määritellään yhtälöllä

$$Y[n] = -X[n] + 2X[n-1] - X[n-2],$$

missä $X[n]$ on heräte ja $Y[n]$ vaste. Määrää systeemin siirtofunktio $H(z)$ ja taajuusvastefunktio $H(\omega)$. Määrää vasteen autokorrelaatiofunktio ja tehotiheysspektri sekä herätteen ja vasteen ristikorrelaatiofunktio ja ristitehotiheysspektri, kun heräte $X[n]$ on diskreettiä valkoista kohinaa joka noudattaa normaalijakaumaa $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Ratkaisu:

Systeemin siirtofunktio $H(z)$ saadaan Z-muunnoksella

$$\begin{aligned} Y(z) &= -X(z) + 2z^{-1}X(z) - z^{-2}X(z) = X(z)[-1 + 2z^{-1} - z^{-2}] \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = -1 + 2z^{-1} - z^{-2}, \end{aligned}$$

josta edelleen taajuusvastefunktio on

$$H(\omega) = H(z)_{|z=\mathrm{e}^{i\omega}} = -1 + 2\,\mathrm{e}^{-i\omega} - \mathrm{e}^{-i2\omega} = \mathrm{e}^{-i\omega}(2 - 2\cos(\omega)).$$

Impulssivaste

$$h[k] = \{\underset{\uparrow}{-1}, 2, -1\}.$$

Lasketaan ensin herätteen autokorrelaatio (valkoista kohinaa, arvot riippumattomia) ja herätteen tehotiheysspektri:

$$R_X[k, k+m] = E[X[k]X[k+m]] = \sigma^2\delta[m] \text{ ja } S_X(\omega) = \sigma^2.$$

Vasteen autokorrelaatiofunktio saadaan kaavasta J24:

$$R_Y[k] = h[-k] * h[k] * R_X[k] = \sigma^2\{1, -4, \underset{\uparrow}{6}, -4, 1\}$$

ja vasteen tehotiheysspektri saadaan Fourier-muuntamalla autokorrelaatiofunktio (H12) tai suoraan kaavasta J25: $S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2\, S_X(\omega) = 4\sigma^2(1 - \cos(\omega))^2$.

Herätteen ja vasteen ristikorrelaatiofunktio (J27)

$$R_{XY}[k] = R_X[k] * h[k] = \sigma^2\{\underset{\uparrow}{-1}, 2, -1\}$$

ja ristitehotiheysspektri $S_{XY}(\omega) = \sigma^2[2 - 2\cos(\omega)]\,\mathrm{e}^{-i\omega}$.

5. (**n**) Olkoon havaintosignaali $X[k] = Z[k] + N[k]$, missä alkuperäinen signaali $Z[k]$ ja siihen summautunut kohina $N[k]$ ovat riippumattomia satunnaissignaaleja ja $E[N[k]] = 0$. Signaalia $Z[k]$ estimoidaan havaintojen $X[k]$ ja $X[k-1]$ lineaarikombinaationa $Y[k] = h[0]X[k] + h[1]X[k-1]$. Määrää estimointivirheen tehon $E[(Z[k] - Y[k])^2]$ minimoivat luvut $h[0]$ ja $h[1]$, kun $N[k]$ on diskreettiä valkoista kohinaa, jonka tehotiheys on yksi ja $R_Z[0] = 5$, $R_Z[\pm 1] = 3$.

Ratkaisu:

Kohinan autokorrelaatiofunktio $R_N[m] = \mathcal{F}^{-1}[1] = \delta[m] = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$

Estimointivirheen tehon $E[(Z[k] - Y[k])^2]$ minimoiva ratkaisu saadaan kaavasta J34 (ortogonaalisuusehto). Koska $Z[k]$ ja $N[k]$ ovat riippumattomia ja $E[N[k]] = 0$, ovat kaavaan sijoitettavat auto- ja ristikorrelaatiot

$$
\begin{aligned}
R_X[k, k+m] &= E[X[k]X[k+m]] = E[(Z[k] + N[k])(Z[k+m] + N[k+m])] \\
&= E[Z[k]Z[k+m]] + E[Z[k]N[k+m]] + E[N[k]Z[k+m]] + E[N[k]N[k+m]] \\
&\text{(riippumattomuus)} \\
&= E[Z[k]Z[k+m]] + E[Z[k]]E[N[k+m]] + E[N[k]]E[Z[k+m]] + E[N[k]N[k+m]] \\
&\text{(nollakeskiarvoisuus)} \\
&= E[Z[k]Z[k+m]] + E[N[k]N[k+m]] = R_X[m] + R_N[m],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{XZ}[k, k+m] &= E[X[k]Z[k+m]] = E[(Z[k] + N[k])Z[k+m]] \\
&= E[Z[k]Z[k+m]] + E[N[k]Z[k+m]] \\
&\text{(riippumattomuus ja edelleen nollakeskiarvoisuus)} \\
&= E[Z[k]Z[k+m]] + E[N[k]]E[Z[k+m]] = R_Z[m]
\end{aligned}
$$

Joten kaavasta J34 saadaan

$$
\begin{aligned}
R_Z[m] &= \sum_{k=0}^{1} h[k] \left(R_Z[m-k] + R_N[m-k] \right), \quad m = 0, 1 \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} R_Z[0] = \sum_{k=0}^{1} h[k](R_Z[-k] + R_N[-k]) \\ R_Z[1] = \sum_{k=0}^{1} h[k](R_Z[1-k] + R_N[1-k]) \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} R_Z[0] = h[0](R_Z[0] + R_N[0]) + h[1](R_Z[-1] + R_N[-1]) \\ R_Z[1] = h[0](R_Z[1] + R_N[1]) + h[1](R_Z[0] + R_N[0]) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan autokorrelaatioiden arvot (tehtävänannosta)

$$
\begin{cases} 5 = h[0](5 + \delta[0]) + h[1](3 + \delta[-1]) \\ 3 = h[0](3 + \delta[1]) + h[1](5 + \delta[0]) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6h[0] + 3h[1] = 5 \\ 3h[0] + 6h[1] = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h[0] = \frac{7}{9} \\ h[1] = \frac{1}{9} \end{cases}
$$

6. (**n**) Linear Predictive Coding (LPC) on puheenkoodauksessa käytettävä menetelmä, missä puhesignaalin $Z(t)$ näytettä $Z[n] = Z(t_n)$ estimoidaan aiempien näytteiden lineaarikombinaationa

$$Z[n] \approx Y[n] = \sum_{k=1}^{p} h[k]Z[n-k]$$

Olkoon $p = 2$. Määrää virheen $E[(Z[n]-Y[n])^2]$ minimoivat kertoimet $h[1]$ ja $h[2]$, kun signaalin $Z[n]$ autokorrelaatiofunktiosta $R_Z[m]$ on estimoitu $R_Z([0] = 5,\ R_Z[1] = 3,\ R_Z[2] = 2$.

<u>Ratkaisu:</u>

Tässä signaaliin ei ole summautunut kohinaa, joten $X[n] = Z[n]$ ja ristikorrelaatio $R_{XZ}[m] = E[X[n]Z[n+m]] = E[Z[n]Z[n+m]] = R_Z[m]$. Täten optimaalisen suodattimen määräävä ortogonaalisuusehto (kaava J34) on muotoa

$$R_Z[m] = \sum_{k=1}^{2} h[k]R_Z[m-k], \quad m = 1, 2.$$

Kirjoitetaan tämä auki tapauksissa $m = 1$ ja $m = 2$

$$\begin{cases} R_Z[1] = h[1]R_Z[0] + h[2]R_Z[-1] \\ R_Z[2] = h[1]R_Z[1] + h[2]R_Z[0]. \end{cases}$$

Sijoitetaan autokorrelaation arvot

$$\begin{cases} 5h[1] + 3h[2] = 3 \\ 3h[1] + 5h[2] = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h[1] = \frac{9}{16} \\ h[2] = \frac{1}{16}. \end{cases}$$

Optimaalisen suodattimen impulssivaste

$$h[k] = \{h[1], h[2]\} = \{\frac{9}{16}, \frac{1}{16}\}.$$