Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 6 syksy 2018

1.-2. (**e**) Vastaukset stackissa.

3. (**p**) Olkoon $X(t)$ ja $Y(t)$ riippumattomia stationaarisia satunnaissignaaleja, joiden odotusarvot ovat μ_X ja μ_Y ja autokorrelaatiofunktiot ovat $R_X(\tau)$ ja $R_Y(\tau)$. Olkoon edelleen $Z(t) = X(t)Y(t)$.

   a) Laske odotusarvo μ_Z ja autokorrelaatiofunktio $R_Z(\tau)$. Onko $Z(t)$ stationaarinen?

   b) Ovatko $X(t)$ ja $Z(t)$ yhteisstationaariset?

   Perustele tarkasti ratkaisusi jokainen vaihe.

   Ratkaisu

   a) $Z(t)$:n odotusarvofunktio

   $$E[Z(t)] = E[X(t)Y(t)] = E[X(t)]E[Y(t)] = \mu_X\mu_Y.$$

   Koska $X(t)$ ja $Y(t)$ ovat stationaarisia, niin $Z(t)$:n odotusarvo on ajasta riippumaton. $Z(t)$:n autokorrelaatiofunktio

   $$\begin{aligned} R_Z(t, t+\tau) &= E[Z(t)Z(t+\tau)] = E[X(t)X(t+\tau)Y(t)Y(t+\tau)] \\ &= E[X(t)X(t+\tau)]E[Y(t)Y(t+\tau)] = R_X(\tau)R_Y(\tau). \end{aligned}$$

   $Z(t)$ on stationaarinen, koska $E[Z(t)]$ ja $R_Z(t, t+\tau)$ ovat ajasta t riippumattomia.

   b) Lasketaan ristikorrelaatio

   $$\begin{aligned} R_{XZ}(t, t+\tau) &= E[X(t)Z(t+\tau)] = E[X(t)X(t+\tau)Y(t+\tau)] \\ &= E[X(t)X(t+\tau)]E[Y(t+\tau)] = R_X(\tau)\mu_Y. \end{aligned}$$

   Koska $X(t)$ ja $Z(t)$ ovat stationaariset ja lisäksi niiden ristikorrelaatio riippuu vain viiveestä τ, niin signaalit ovat yhteisstationaariset.

4. (**p**) Olkoon $X(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \Theta)$, missä $A(t)$ on vaiheesta Θ riippumaton stationaarinen signaali, jonka autokorrelaatiofunktio on $R_A(\tau)$, ja vaihe Θ on tasajakautunut, $\Theta \sim \mathrm{Tas}(0, 2\pi)$.

   a) Tutki, onko $X(t)$ stationaarinen.

   b) Olkoon $Y(t) = A(t)\cos((\omega_0 + \omega_1)t + \Theta)$. Onko $Y(t)$ stationaarinen?

   c) Laske ristikorrelaatiofunktio $R_{XY}(t, t+\tau)$. Ovatko $X(t)$ ja $Y(t)$ yhteisstationaarisia?

   d) Onko signaali $X(t) + Y(t)$ stationaarinen?

a)

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= E[A(t)\cos(\omega_0 t+\Theta)] = E[A(t)]E[\cos(\omega_0 t+\Theta)] \\
&= \mu_A \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)\mathrm{d}\theta = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_X(t,t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E[A(t)\cos(\omega_0 t+\Theta)A(t+\tau)\cos(\omega_0(t+\tau)+\Theta)] \\
&= E[A(t)A(t+\tau)]E[\cos(\omega_0 t+\Theta)\cos(\omega_0(t+\tau)+\Theta)] \\
&= R_A(\tau)\frac{1}{2}E[\cos(\omega_0\tau)+\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\theta)] \\
&= R_A(\tau)\left[\frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\theta)\mathrm{d}\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}R_A(\tau)\cos(\omega_0\tau)
\end{aligned}
$$

Satunnaissignaali $X(t)$ on stationaarinen.

b) Satunnaissignaali $Y(t)$ on stationaarinen, sillä kuten edellä

$$
E[Y] = 0 \quad \text{ja } R_Y(\tau) = \frac{1}{2}R_A(\tau)\cos((\omega_0+\omega_1)\tau)
$$

c) Signaalit $X(t)$ ja $Y(t)$ ovat stationaariset, tutkitaan vielä onko ristikorrelaatiokin ajasta riippumaton:

$$
\begin{aligned}
R_{XY}(t,t+\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\
&= E[A(t)\cos(\omega_0 t+\Theta)A(t+\tau)\cos((\omega_0+\omega_1)(t+\tau)+\Theta)] \\
&= E[A(t)A(t+\tau)]E[\cos(\omega_0 t+\Theta)\cos((\omega_0+\omega_1)(t+\tau)+\Theta)] \\
&= \frac{1}{2}R_A(\tau)E[\cos(\omega_0\tau+\omega_1(t+\tau))+\cos((\omega_0(2t+\tau)+\omega_1(t+\tau)+2\theta)] \\
&= \frac{1}{2}R_A(\tau)\cos(\omega_0\tau+\omega_1(t+\tau)).
\end{aligned}
$$

Ristikorrelaatio riippuu ajasta, joten $X(t)$ ja $Y(t)$ eivät ole yhteisstationaariset.

d)

$$
\begin{aligned}
E[Z(t)] &= E[X(t)+Y(t)] = E[X(t)]+E[Y(t)] = 0 \\
R_Z(t,t+\tau) &= E[Z(t)Z(t+\tau)] = E[(X(t)+Y(t))(X(t+\tau)+Y(t+\tau))] \\
&= E[X(t)X(t+\tau)+X(t)Y(t+\tau)+X(t+\tau)Y(t)+Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= R_X(\tau)+R_{XY}(t,t+\tau)+R_{YX}(t,t+\tau)+R_Y(\tau)
\end{aligned}
$$

Tarkistetaan vielä ristikorrelaatioiden $R_{XY}(t,t+\tau)$ ja $R_{YX}(t,t+\tau)$ summa. Käytetään kaavaa D9:

$$
\begin{aligned}
R_{XY}(t,t+\tau)+R_{YX}(t,t+\tau) &= \frac{1}{2}R_A(\tau)\left(\cos(\omega_0\tau+\omega_1(t+\tau))+\cos(\omega_1 t-\omega_0\tau)\right) \\
&= R_A(\tau)\cos(\omega_1 t+\frac{1}{2}\omega_1\tau)\cos(\omega_0\tau+\frac{1}{2}\omega_1\tau),
\end{aligned}
$$

joten autokorrelaatiofunktio todella riippuu ajasta ja siten $Z(t)$ ei ole stationaarinen.

5. (**n**) Määritellään kompleksinen satunnaismuuttuja $Z = X + iY$, missä X ja Y ovat reaaliarvoisia satunnaismuuttujia.

a) Määrää muuttujien X ja Y kovarianssimatriisi, kun muuttujan Z odotusarvo on $\mu_Z = 0$, varianssi $E[|Z - \mu_Z|^2] = 3$ ja pseudovarianssi $E[(Z - \mu_Z)^2] = 1 + 2i$.

b) Tiedetään, että X ja Y ovat normaalijakautuneita. Mikä on yhteisjakauman tiheysfunktio?

Ratkaisu:

a) Koska $E[Z] = E[X] + iE[Y]$ ja $E[Z] = 0$, niin $E[X] = E[Y] = 0$. Varianssi $E[|Z|^2] = E[|X + iY|^2] = E[X^2 + Y^2] = E[X^2] + E[Y^2] = 3$ ja pseudovarianssi $E[Z^2] = E[(X + iY)^2] = E[X^2 - Y^2 - i2XY] = E[X^2] - E[Y^2] + i2E[XY] = 1 + 2i$, joten kahdesta edellisestä yhtälöstä saadaan $E[X^2] = 2$, $E[Y^2] = 1$ ja $E[XY] = 1$. Siten $\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 1$ ja kovarianssimatriisi on

$$C_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) (vrt. esimerkki 4.14 luentokalvot/-moniste)

Nyt

$$C_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

joten

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - 2xy + 2y^2,$$

joten yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{e}^{-(x^2 - 2xy + 2y^2)/2}.$$

6. (**n**) Olkoon $X(t) = 2\cos(\Omega t + \Theta)$, missä $\Omega \sim \mathrm{Tas}(-1, 1)$ ja $\Theta \sim \mathrm{Tas}(-\pi, \pi)$ ovat riippumattomia satunnaismuuttujia. Laske $X(t)$:n odotusarvofunktio, autokorrelaatiofunktio ja keskimääräinen teho.

Ratkaisu:

Odotusarvofunktio

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= E[2\cos(\Omega t + \Theta)] \\
&\quad (\text{ ehdollinen od.arvo}) \\
&= 2E\{E[\cos(\Omega t + \Theta)|\Omega]\} \\
&= 2E[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\Omega t + \theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta] \\
&= \frac{1}{\pi}E[\Big/_{-\pi}^{\pi} \sin(\Omega t + \theta)] \\
&= \frac{1}{\pi}E[\sin(\Omega t + \pi) - \sin(\Omega t - \pi)] \\
&= \frac{1}{\pi}E[0] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$X(t)$:n autokorrelaatiofunktio

$$
\begin{aligned}
R(t, t+\tau) &= E[2\cos(\Omega t + \Theta) \cdot 2\cos(\Omega t + \Omega\tau + \Theta)] \\
&\quad (\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)),\ \text{ehdollinen od.arvo }) \\
&= 2E\{E[\cos(2\Omega t + \Omega\tau + 2\Theta) + \cos(\Omega\tau)|\Omega]\} \\
&= 2E[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\Omega t + \Omega\tau + 2\theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta] + 2\int_{-1}^{1} \cos(\omega\tau)\frac{1}{2}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}E[\underbrace{\Big/_{-\pi}^{\pi} \sin(2\Omega t + \Omega\tau + 2\theta)}_{=0,\text{ integr. yli 2 jakson}}\ ] + \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{\tau}\sin(\omega\tau) \\
&= \frac{\sin(\tau)}{\tau} - \frac{\sin(-\tau)}{\tau} \\
&= \frac{2\sin(\tau)}{\tau}.
\end{aligned}
$$

Keskimääräinen teho $P = R(0) = \lim_{\tau\to 0} \frac{2\sin(\tau)}{\tau} = 2$.