Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 4 syksy 2018

1.-2. (**e**) Vastaukset stackissa.

3. (**p**) Olkoon $m(t) = \mathrm{sinc}(2t)$. Laske ja piirrä SSB-moduloidun signaalin

$$x(t) = m(t)\cos 2\pi f_c t - \hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t$$

amplitudispektri, kun $f_c = 8$ Hz.

<u>Ratkaisu</u> $\mathcal{F}\{m(t)\} = M(f) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{f}{2}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |f| < 1 \\ 0, & |f| > 1. \end{cases}$

Esiverhokäyrän $m_+(t) = m(t) + i\hat{m}(t)$ Fourier-muunnos

$$M_+(f) = \begin{cases} 2M(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < f < 1 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

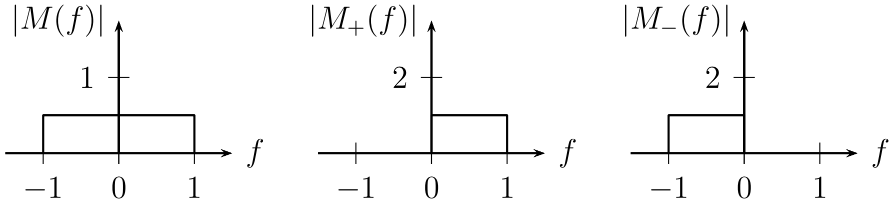
Vastaavasti merkitään

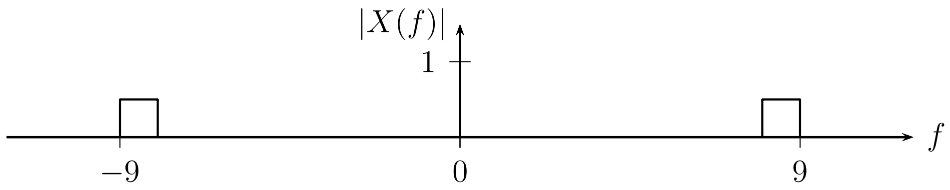
$$\begin{aligned} M_-(f) &= \mathcal{F}\{m(t) - i\hat{m}(t)\} = M(f) - i\hat{M}(f) \\ &= \begin{cases} M(f) + i^2 M(f), & f > 0 \\ M(f) - i^2 M(f), & f < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & f > 0 \\ 2M(f), & f < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & -1 < f < 0 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \end{aligned}$$

SSB-signaalin $x(t) = m(t)\cos 16\pi t - \hat{m}(t)\sin 16\pi t$ Fourier-muunnos:

$$\begin{aligned} X(f) &= M(f) * \frac{1}{2}[\delta(f-8) + \delta(f+8)] - \hat{M}(f) * \frac{1}{2i}[\delta(f-8) - \delta(f+8)] \\ &= \frac{1}{2}M(f-8) + \frac{1}{2}M(f+8) - \frac{1}{2i}\hat{M}(f-8) + \frac{1}{2i}\hat{M}(f+8) \\ &= \frac{1}{2}[M(f-8) + i\hat{M}(f-8)] + \frac{1}{2}[M(f+8) - i\hat{M}(f+8)] \\ &= \frac{1}{2}M_+(f-8) + \frac{1}{2}M_-(f+8) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < f-8 < 1 \\ \frac{1}{2}, & -1 < f+8 < 0 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & 8 < f < 9 \text{ tai } -9 < f < -8 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \end{aligned}$$

Amplitudispektrit:





4. (**p**) Ratkaisu

a) Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo $E(X)$, varianssi $D^2(X)$ ja odotusarvo $E[\log_2(X)]$, kun jakauman (piste)todennäköisyysfunktio on annettu oheisessa taulukossa

x_k	1	2	4	8
$P(X = x_k)$	0.3	0.4	0.2	0.1

b) Laske odotusarvo $E[X]$ ja varianssi $D^2(X)$, kun satunnaismuuttuja X jakauman kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Ratkaisu

a) Odotusarvo

$$\begin{aligned} E(X) = \mu_X &= \sum_{x_k} x_k P(X = x_k) \\ &= 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.2 + 8 \cdot 0.1 \\ &= 2.7 \end{aligned}$$

Varianssi

$$\begin{aligned} D^2(X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 &= E[(X - \mu_X)^2] \\ &= E(X^2) - \mu_X^2 \\ &= \sum_{x_k} x_k^2 P(X = x_k) - \mu_X^2 \\ &= 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.4 + 4^2 \cdot 0.2 + 8^2 \cdot 0.1 - 2.7^2 \\ &= 4.21 \end{aligned}$$

Logaritmifunktion odotusarvo

$$\begin{aligned} E(\log_2(X)) &= \sum_{x_k} \log_2(x_k) P(X = x_k) \\ &= \log_2(1) \cdot 0.3 + \log_2(2) \cdot 0.4 + \log_2(4) \cdot 0.2 + \log_2(8) \cdot 0.1 \\ &= 1.1 \end{aligned}$$

b) Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio saadaan derivoimalla kertymäfunktio $F(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

Odotusarvo

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 2x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

ja varianssi

$$\begin{aligned} D^2(X) = \sigma_X^2 &= E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \int_0^1 x^2 \cdot 2x \mathrm{d}x - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{2} \Big/_0^1 x^4 - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

5. (**n**) Kausaalisen LTI-systeemin vaste on $y[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2\}$ kun heräte on $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, \frac{1}{3}\}$. Määrää systeemin siirtofunktio, impulssivaste ja differenssiyhtälö jonka systeemin heräte ja vaste toteuttavat. Onko systeemi stabiili?

Ratkaisu
Z-muunnetaan signaalit:

$$Y(z) = \mathcal{Z}[y[n]] = \sum_n y[n] z^{-n} = 1 + 2z^{-1}, \quad X(z) = 1 + \frac{1}{3} z^{-1}.$$

Siirtofunktio

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{z + 2}{z + \frac{1}{3}}.$$

$H(z)$:n ainoa napa (nimittäjän nollakohta) $z = -\frac{1}{3}$ on yksikköympyrän sisällä
$\Rightarrow$ Systeemi on stabiili.

Siirtofunktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}} + 2z^{-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}} = \mathcal{Z}\{(-\frac{1}{3})^n u[n]\} + 2z^{-1} \mathcal{Z}\{(-\frac{1}{3})^n u[n]\} \quad \text{(ks. kaavakok.)},$$

joten impulssivasteeksi saadaan

$$\begin{aligned} h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} &= (-\frac{1}{3})^n u[n] + 2 \underbrace{(-\frac{1}{3})^{n-1}}_{-3(-\frac{1}{3})^n} u[n-1] \\ &= (-\frac{1}{3})^n (u[n] - 6u[n-1]). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}} \Leftrightarrow (1 + \frac{1}{3} z^{-1}) Y(z) = (1 + 2z^{-1}) X(z).$$

Z-käänteismuuntamalla saadaan differenssiyhtälö

$$y[n] = -\frac{1}{3} y[n-1] + x[n] + 2x[n-1].$$

6. (**n**) Laske Rayleigh-jakauman Rayleigh(1) odotusarvo ja varianssi.

<u>Ratkaisu</u>

Rayleigh(1)-jakauman tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}, \text{ kun } x \geq 0 \\ 0, \text{ kun } x < 0 \end{cases} \quad .$$

Odotusarvo (käytä osittaisintegrointia)

$$E(X) = \int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = \Big/_{0}^{\infty} -x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ja varianssi (käytä osittaisintegrointia)

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^\infty x^3\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} \\ &= \Big/_{0}^{\infty} -x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} + 2\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} \\ &= -2 \Big/_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$