Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 3 syksy 2018

1.-2. (**e**) Vastaukset stackissa.

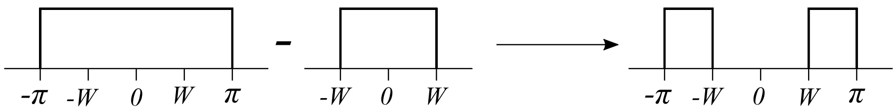
3. (**p**) Minkä signaalien Fourier-muunnoksia ovat seuraavat funktiot?

a) $X(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \le |\omega| \le W \\ 1, & W < |\omega| \le \pi. \end{cases}$

b) $X(\omega) = \cos^2 \omega.$

Ratkaisu

a) $X(\omega)$ saadaan kahden suorakaidefunktion erotuksena.



Käytetään kaavaa I2 apuna ja huomioidaan, että $\omega = 2\pi f$. Täten

$$x[n] = \frac{\sin(2\pi\frac{1}{2}n)}{\pi n} - \frac{\sin(2\pi\frac{W}{2\pi}n)}{\pi n} = \frac{1}{\pi n}(\sin(\pi n) - \sin(Wn)).$$

$x[n]$ saadaan myös suoraan integroimalla käänteismuunnoksen avulla:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega n} \mathrm{d}\omega. \tag{1}$$

b) Koska

$$X(\omega) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{i2\omega} + \mathrm{e}^{-i2\omega}\right),$$

niin vertaamalla tätä suoraan summakaavaan (H12):

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, \mathrm{e}^{-i\omega n}$$

nähdään

$$x[2] = x[-2] = \frac{1}{4} \text{ ja } x[0] = \frac{1}{2}.$$

Vaihtoehtoisesti saa myös integroimalla käänteismuunnoksen (1) kaavasta.

4. (**p**) Määrää analogisen LTI-systeemin ($x(t)$ on heräte ja $y(t)$ on vaste) siirtofunktio, amplitudivaste, vaihevaste ja impulssivaste sekä piirrä impulssivasteen kuvaaja, kun systeemi on määritelty differentiaaliyhtälöllä

$$y'(t) + 8y(t) = 3x(t-4), \quad y(0) = 0 \text{ ja } x(t) = 0, \; t < 0.$$

Ratkaisu

Fourier-muunnetaan differentiaaliyhtälö:

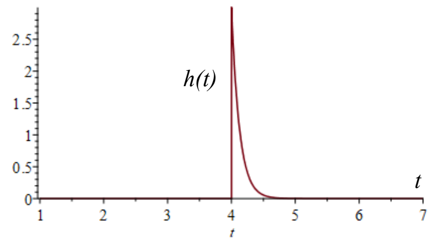
$$\Rightarrow \qquad i2\pi f Y(f) + 8Y(f) = 3X(f)\,\mathrm{e}^{-i2\pi f \cdot 4}$$

$$\Rightarrow \text{ siirtofunktio} \qquad H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{3\,\mathrm{e}^{-i8\pi f}}{8 + i2\pi f}$$

$$\text{amplitudivaste} \qquad |H(f)| = \frac{|3\,\mathrm{e}^{-i6\pi f}|}{|8 + i2\pi f|} = \frac{3}{\sqrt{64 + 4\pi^2 f^2}}$$

$$\text{vaihevaste} \qquad \theta(f) = \arg H(f) = -8\pi f - \overline{\mathrm{arc}}\tan(\frac{\pi f}{4})$$

$$\text{impulssivaste} \qquad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = 3\,\mathrm{e}^{-8(t-4)}u(t-4)$$



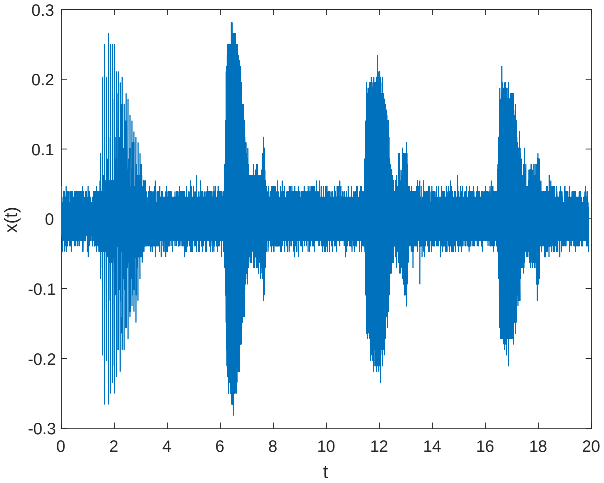
5. (**n**) Lataa Matlabissa sinivalaan nauhoitettua ääntelyä (10-kertaisesti nopeutettuna) komennoilla

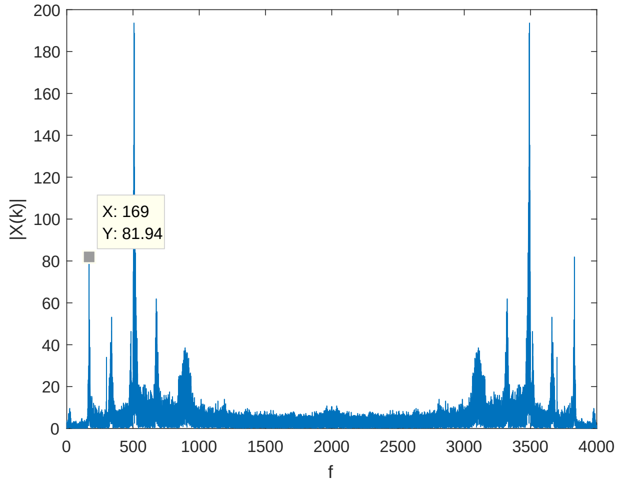
```
whaleFile = fullfile(matlabroot,'examples','matlab','bluewhale.au');
[x,fs] = audioread(whaleFile);
```

(Jos haluat ja tietokoneesi ääniasetukset ovat kunnossa, voit kuunnella nauhoitteen komennolla `sound(x,fs)`.) Piirrä signaali. Approksimoi signaalin amplitudispektriä diskreetin Fourier-muunnoksen avulla. Mitkä analogiset taajuudet ovat hallitsevia? Saatat tarvita komentoja `fft`, `plot`, `abs`, `length`,...

Ratkaisu

```
N=length(x);
df=fs/N;
f=df*(0:(N-1));
plot(f,abs(fft(x)))
```





Data cursor -työkalulla poimittuna amplitudispektrin huippukohdat ovat 169 Hz, 339 Hz, 507.5 Hz, 675.6 Hz ja 893.7 Hz. Korkein taajuus näistä eli 893.7 Hz liittyy ensimmäiseen "pulssiin", 169 Hz ja sen monikerrat kolmeen "törähdykseen"aikaväleillä 6-8 s, 11-13 s ja 16-18 s.

Näytteistystaajuus on $f_s = 4000$ Hz. Koska DFT toteuttaa symmetriaehdon $|X(N-k)| = |X(k)|$, kuvan piikit välillä $[\frac{f_s}{2},\ f_s] = [2000, 4000]$ ovat peilikuvia välin $[0,\ \frac{f_s}{2}] = [0, 2000]$ piikeistä, eli liittyvät taajuuksiin 893.7, 675.5, 507.5, 339 ja 169 Hz.

6. (**n**) Sarjaan kytketyn RL-piirin virta $y(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$y'(t) + y(t) = x(t),\ \ t \geq 0,\ \ y(0) = 0.$$

Määrää kyseisen LTI-systeemin siirtofunktio ja impulssivaste. Onko systeemi kausaalinen? Laske amplitudivaste ja vaihevaste sekä vaste herätteeseen $x(t) = u(t)$.

<u>Ratkaisu</u>

Fourier-muunnetaan differentiaaliyhtälö:

$\Rightarrow$ $$i2\pi f Y(f) + Y(f) = X(f)$$

$\Rightarrow$ siirtofunktio $$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + i2\pi f}$$

impulssivaste $$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \mathrm{e}^{-t}u(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

amplitudivaste $$|H(f)| = \frac{|1|}{|1 + i2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2}}$$

vaihevaste $$\theta(f) = \arg H(f) = \arg 1 - \arg(1 + i2\pi f) = -\overline{\mathrm{arc}}\tan(2\pi f)$$

Systeemi on kausaalinen, koska $h(t) = 0$ kun $t < 0$.

Askelvasteeksi eli herätteen $x(t) = u(t)$ vasteeksi saadaan

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\tau} d\tau = \Big/_{0}^{t} - \mathrm{e}^{-\tau} = 1 - \mathrm{e}^{-t}, \quad t \geq 0 \\ y(t) &= 0, \quad t < 0 \\ \Rightarrow y(t) &= (1 - \mathrm{e}^{-t}) u(t). \end{aligned}$$