Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 2 syksy 2018

1. Esitehtävä: Vastaukset stackissa

2. Esitehtävä: Vastaukset stackissa

3. Laske Fourier-muunnoksen avulla signaalin $x(t) = \mathrm{e}^{-2t}u(t)$ autokorrelaatiofunktio $r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)}x(t+\tau)\, dt$.

   <u>Ratkaisu</u>

   Koska

$$\begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)}x(t+\tau)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(\tau-(-t))\mathrm{d}t \\ &= x(\tau) * x(-\tau), \end{aligned}$$

   niin kaavan A12 avulla voidaan autokorrelaatiofunktio ratkaista Fourier-muunnoksilla:

$$\mathcal{F}\{x(\tau) * x(-\tau)\} = \mathcal{F}\{x(\tau)\} \cdot \mathcal{F}\{x(-\tau)\},$$

   jossa kaavan B3 avulla

$$\mathcal{F}\{x(\tau)\} = \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-2\tau}u(\tau)\} = \frac{1}{2+i2\pi f}$$

   ja edelleen kaavan A2 avulla

$$\mathcal{F}\{x(-\tau)\} = \frac{1}{2-i2\pi f}.$$

   Siten

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(-\tau)\} \cdot \mathcal{F}\{x(\tau)\} &= \frac{1}{2+i2\pi f} \cdot \frac{1}{2-i2\pi f} = \frac{1}{4+4\pi f} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2^2 + (2\pi f)^2}, \end{aligned}$$

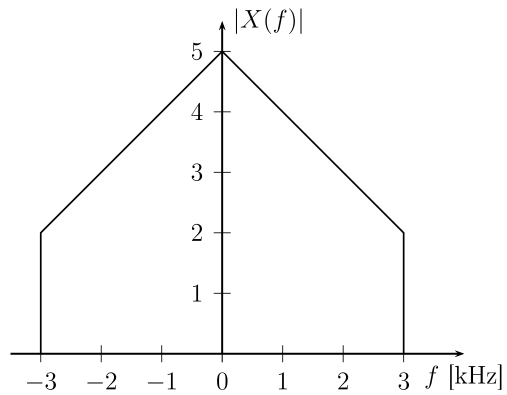
   josta käänteismuunnoksella (kaava B4) saadaan

$$r_{xx}(\tau) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2|\tau|}.$$

4. Parillisen analogiasignaalin $x(t)$ amplitudispekti on kuvion mukainen. Piirrä $x(t)$:stä otetun näytejonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ amplitudispektri, kun näytteenottoväli on

   (a) $T = 0.125$ ms (b) $T = 0.2$ ms.

   Mikä on signaaliin liittyvä kriittinen näytteenottotaajuus eli ns. Nyquistin taajuus? Miltä näytejonon $\hat{x}(t)$ Fourier-muunnos näyttää, kun näytteenottotaajuus on Nyquistin taajuus?



Ratkaisu

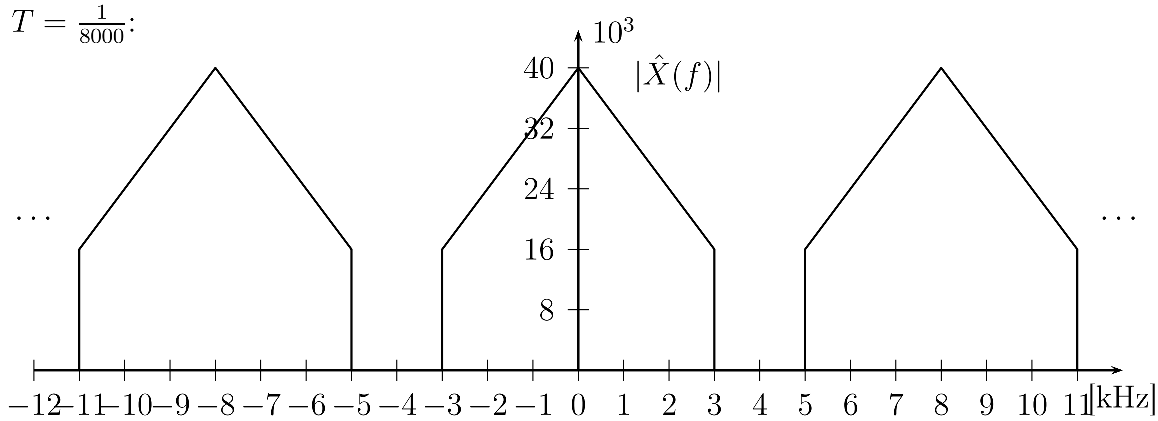
Koska $x(t)$ on parillinen, sen Fourier-muunnos on reaalinen ja kuvan itseisarvomerkit voidaan poistaa. Näytteenotossa signaali $x(t)$ kerrotaan impulssijonolla $\Delta(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$,

$$\hat{x}(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT),$$

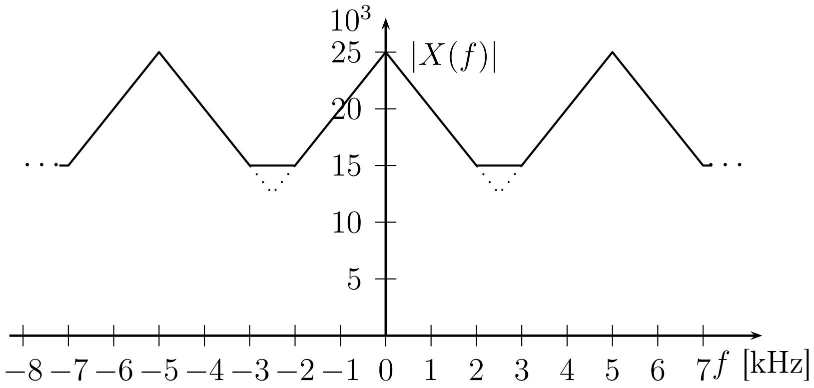
missä T on näytteenottoväli. Koska tulon Fourier-muunnos on Fourier-muunnosten konvoluutio, saadaan (kaavoista A11 ja B17)

$$\begin{aligned}
\hat{X}(f) &= X(f) * \mathcal{F}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\} \\
&= X(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T}) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f - \frac{k}{T}) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T})
\end{aligned}$$

a) $T = \frac{1}{8000}$:



b) $T = \frac{1}{5000}$:



Kriittisellä näytteenottotaajuudella (Nyquistin taajuudella) kopiot sivuavat toisiaan, mutta eivät mene päällekkäin (laskostu). Tässä Nyquistin taajuus on

$$f_s = 2f_c = 6\text{kHz},$$

mihin suurin taajuuskomponentti $f_c = 3$kHz luetaan $x(t)$:n amplitudispektristä.

5. Analogisesta signaalista $x(t) = \sin(2000\pi t)$ otetaan näytteitä 0.0008 sekunnin välein.

a) Piirrä signaalin $x(t)$ amplitudispektrin kuvaaja.

b) Piirrä näytejonon $\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$ amplitudispektri. Tapahtuuko laskostumista?

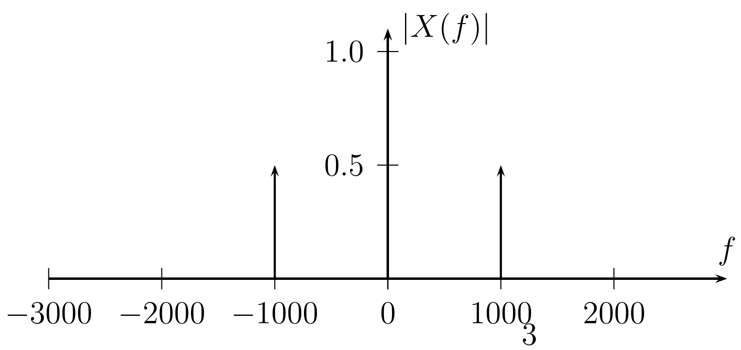
c) Jos laskostumista tapahtuu, miksi taajuudeksi signaali tulkitaan, ts. mille taajuudelle se laskostuu?

d) Mikä olisi riittävä näytteenottotaajuus laskostumisen estämiseksi?

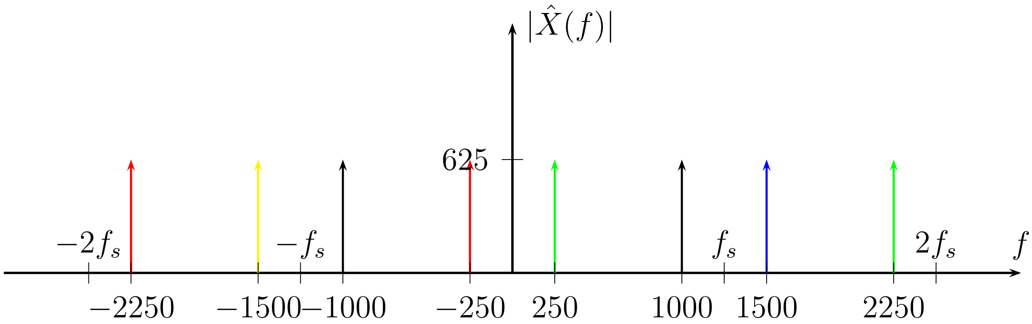
<u>RATKAISU</u>
Analoginen signaali $x(t) = \sin(2000\pi t) = \sin(2\pi \cdot 1000t)$.
Näytteenottoväli $T = 0.0008$s, näytteenottotaajuus $f_s = \frac{1}{0.0008\ s} = 1250$Hz.

a) Fourier-muunnos (kaavakokoelma B13)

$$X(f) = \frac{1}{2i}[\delta(f - 1000) - \delta(f + 1000)]$$
$$\Rightarrow |X(f)| = \frac{1}{2}[\delta(f - 1000) + \delta(f + 1000)]$$



b) Kuten aiemmassa tehtävässä, $\hat{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T}) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s)$. Alkuperäinen spektri kopioituu 1250 hertsin välein (kuvassa kopiot on piirretty eri värein).



Laskostuminen tapahtuu, koska kopiot taajuuksilla $\pm(1000 - 1250) = \mp 250$ Hz sattuvat välille $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$

c) Signaali tulkitaan taajuudeksi 250 Hz $\in [0, \frac{f_s}{2}]$.

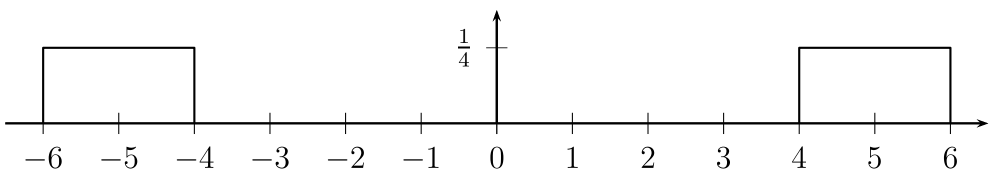
d) Riittävä näytteenottotaajuus olisi vähintään Nyquistin taajuus $2f_c = 2000$ Hz.

6. Määrää signaalin $x(t) = \text{sinc}(2t)\cos(10\pi t)$ Nyquistin näytteenottotaajuus. Tapahtuuko laskostumista, jos signaali näytteistetään taajuudella $f_s = 8$?

RATKAISU Lasketaan amplitudispektri: kaavakokoelman avulla

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{2}\text{rect}(\frac{f}{2}) * \frac{1}{2}[\delta(f-5) + \delta(f+5)] \\ &= \frac{1}{4}\text{rect}(\frac{f-5}{2}) + \frac{1}{4}\text{rect}(\frac{f+5}{2}) \end{aligned}$$

Amplitudispektrin $|X(f)|$ kuvaaja:



Suurin taajuus on $f_c = 6$, joten Nyquistin taajuus on $2f_c = 12$.

Näytteistystaajuudella $f_s = 8$, kuvio kopioituu 8 yksikön välein. Tällöin kuviossa ei tapahdu laskostumista.