Signaalianalyysi 031080A

Laskuharjoitustehtävät 1 syksy 2018

1. Esitehtävä: Vastaukset stackissa

2. Esitehtävä: Vastaukset stackissa

3. Määritellään signaalit $x[n] = \{3, \underset{\uparrow}{2}, 0, -3\}$ ja $y[n] = \{1 \underset{\uparrow}{+} i, 2, 3 - i\}$.
   (a) Laske autokorrelaatiot $r_{xx}[l]$ ja $r_{yy}[l]$ sekä signaalien energiat.
   (b) Laske ristikorrelaatiot $r_{xy}[l]$ ja $r_{yx}[l]$. Minkä säännön ristikorrelaatio toteuttaa?

   <u>Ratkaisu</u>

   Lasketaan autokorrelaatio

$$r_{xx}[n] = \overline{x[-n]} * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{x[k]}x[k+n]$$

   ja ristikorrelaatio

$$r_{xy}[n] = \overline{x[-n]} * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{x[k]}y[k+n]$$

   alekkainkertolaskulla, siten että

   1° jos summa tai tulo ≥ 10 niin sitä ei merkitä muistiin

   2° nollaindeksin paikka $\uparrow$ määrätään kuten desimaalipilkun paikka

   a) $r_{xx}[l] = x[-n] * x[n] = \{-3, 0, \underset{\uparrow}{2}, 3\} * \{3, \underset{\uparrow}{2}, 0, -3\} = \{-9, -6, 6, \underset{\uparrow}{22}, 6, -6, -9\}$,
   $E_x = r_{xx}[0] = 22.$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & -3 & 0 & 2 & 3 \\
 & & & 3 & 2 & 0 & -3 \\
\cline{4-7}
 & & & 9 & 0 & -6 & -9 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & -6 & 0 & 4 & 6 & & \\
-9 & 0 & 6 & 9 & & & \\
\hline
-9 & -6 & 6 & 22 & 6 & -6 & -9
\end{array}$$

   $r_{yy}[n] = \overline{y[-n]} * y[n] = \{3 + i, 2, 1 \underset{\uparrow}{-} i\} * \{1 \underset{\uparrow}{+} i, 2, 3 - i\}$
   $= \{2 + 4i, 8 + 4i, \underset{\uparrow}{16}, 8 - 4i, 2 - 4i\}$,
   $E_y = r_{yy}[0] = 16.$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 3+i & 2 & 1-i \\
 & & 1+i & 2 & 3-i \\
\cline{3-5}
 & & 10 & 6-2i & 2-4i \\
 & 6+2i & 4 & 2-2i & \\
2+4i & 2+2i & 2 & & \\
\hline
2+4i & 8+4i & 16 & 8-4i & 2-4i
\end{array}$$

b) $r_{xy}[n] = \overline{x[-n]} * y[n] = \{-3, 0, 2, \underset{\uparrow}{3}\} * \{1 \underset{\uparrow}{+} i, 2, 3 - i\}$
$= \{-3 - 3i, -6, -7 \underset{\uparrow}{+} 5i, 7 + 3i, 12 - 2i, 9 - 3i\}.$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -3 & 0 & 2 & 3 \\
 & & & 1+i & 2 & 3-i \\
\cline{3-6}
 & & -9+3i & 0 & 6-2i & 9-3i \\
 & -6 & 0 & 4 & 6 & \\
-3-3i & 0 & 2+2i & 3+3i & & \\
\hline
-3-3i & -6 & -7+5i & 7+3i & 12-2i & 9-3i
\end{array}$$

Koska ristikorrelaatiofunktio on konjugaattisymmetrinen, niin
$r_{yx}[n] = \overline{y[-n]} * x[n] = \overline{r_{xy}[-n]} = \{9 + 3i, 12 + 2i, 7 - 3i, -7 \underset{\uparrow}{-} 5i, -6, -3 + 3i\}.$

4. Määritellään jatkuva-aikaiset signaalit $x(t) = u(t)$ ja $y(t) = \mathrm{e}^{-3t}u(t)$. Laske konvoluution $z(t) = x(t) * y(t)$ arvo
(a) hetkellä 2
(b) hetkellä -2
(c) hetkellä $t \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu

a)

$$z(2) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\mathrm{e}^{-3(2-\tau)}u(2-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^2 \mathrm{e}^{-3(2-\tau)}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{3}(1 - \mathrm{e}^{-6})$$

b) $z(-2) = 0$

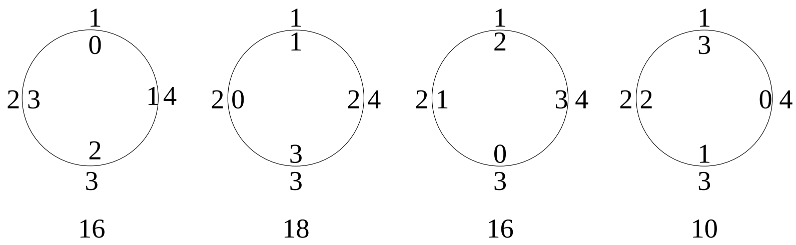
c) Kun $t < 0$, niin $z(t) = 0$. Kun $t \geq 0$,

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^{-3(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{3}(1 - \mathrm{e}^{-3t}).$$

Siis $z(t) = \frac{1}{3}(1 - \mathrm{e}^{-3t})u(t)$.

5. Laske signaalien $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$ ja $y[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3\}$ syklinen konvoluutio $x[n] \circledast y[n]$ ja konvoluutio $x[n] * y[n]$.

Ratkaisu
Syklisen konvoluution $x[n] \circledast y[n]$ laskenta:



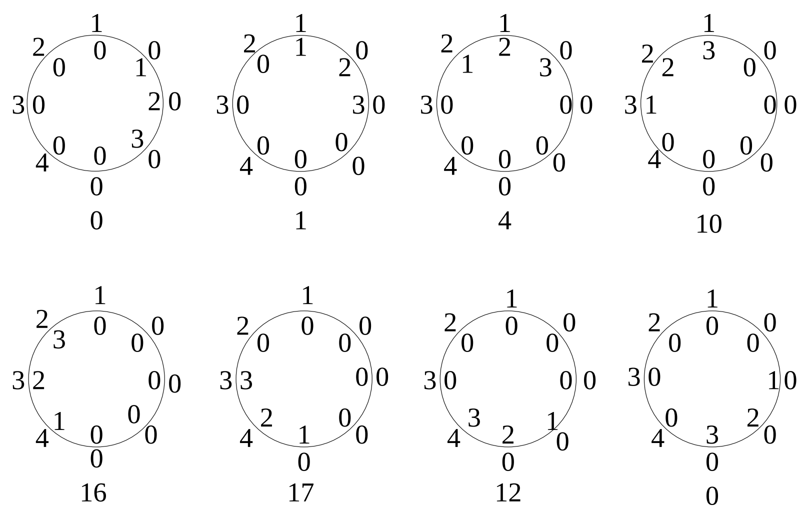
$\Rightarrow\ x[n] \circledast y[n] = \{\underset{\uparrow}{16}, 18, 16, 10\}.$

Konvoluutio $x[n] * y[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\} * \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3\} = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 10, 16, 17, 12\}$.

			1	2	3	4
			0	1	2	3
			3	6	9	12
		2	4	6	8	
	1	2	3	4		
0	0	0	0			
0	1	4	10	16	17	12

6. Laske signaalien $x_z[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0\}$ ja $y_z[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 0\}$ syklinen konvoluutio $x_z[n] \circledast y_z[n]$. Voit käyttää esim. Matlabia. Mitä huomaat, kun vertaat edelliseen tehtävään?

<u>Ratkaisu</u>
Signaalien $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0\}$ ja $y_z[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 0\}$ syklisen konvoluution $x_z[n] \circledast y_z[n]$ laskenta:



$\Rightarrow \;\; x_z[n] \circledast y_z[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 10, 16, 17, 12, 0\}$. Matlabilla:

```
>> x=[1 2 3 4];
>> y=[0 1 2 3];
>> z=cconv(x,y,8)

z =

0    1.0000    4.0000   10.0000   16.0000   17.0000   12.0000         0
```

Kun $x_z[n]$ ja $y_z[n]$ muodostetaan lisäämällä riittävästi (pituudeksi tultava vähintään alkuperäisten signaalien pituuksien summa-1) nollia $x[n]$:n ja $y[n]$:n loppuun, on voimassa

$$x_z[n] \circledast y_z[n] = x[n] * y[n].$$