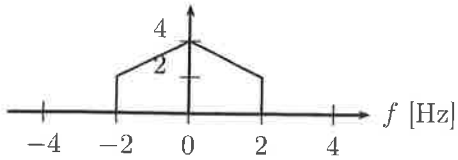
Signaalianalyysi 031080A

Loppukoe 4.10.2018

1. (a) Tutki laskemalla, ovatko signaalit $x(n) = (\frac{1}{2})^n$ ja $y(t) = e^{i2\pi t}u(t)$ energia- tai tehosignaaleja. Laske signaalin $x(n) = \{\underset{\uparrow}{-1}, 2, i\}$ autokorrelaatiofunktio (i on imaginääriyksikkö).

   (b) Analogisen signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos on esitetty oheisessa kuvassa.



   Kuinka pieni pitää näytteenottovälin T olla, jotta $x(t)$ voidaan yksikäsitteisesti määrätä näytteistä $x(nT)$, $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$? Olkoon näytteenottotaajuus $f_s = 3$ Hz. Piirrä impulssijonon $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$ Fourier-muunnos. Tapahtuuko laskostumista?

2. (a) Laske diskreetin signaalin $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, 1, -2\}$ 4 pisteen diskreetti Fourier-muunnos $X(k)$ ja piirrä amplitudispektrin $|X(k)|$:n kuvaaja.

   (b) Analoginen LTI-systeemi on määritelty differentiaaliyhtälöllä

$$y'(t) + 5y(t) = 3x(t-4), t \geq 0$$

   alkuehdolla $y(0) = 0$, $x(t) = 0$, $t \leq 0$, missä $x(t)$ on heräte ja $y(t)$ on vaste. Määrää tämän systeemin siirtofunktio ja impulssivaste. Onko systeemi kausaalinen?

3. Olkoon X_n aikadiskreetti nollakeskiarvoinen satunnaissignaali, jolle $E[X_n^2] = 1$ kaikilla n:n arvoilla. Lisäksi tiedetään, että X_n ja X_m ovat riippumattomat aina kun $n \neq m$.

   (a) Laske autokorrelaatiofunktio $R_X(n, n+k)$, kun $k = 0$ ja kun $k \neq 0$. Tutki, onko signaali stationaarinen.

   (b) Olkoon $Y_n = X_n + X_{n-1}$ (tai vaihtoehtoisesti $Y_n = X_n * \{\underset{\uparrow}{1}, 1\}$). Laske Y_n:n odotusarvofunktio ja autokorrelaatiofunktio. Onko Y_n stationaarinen? Perustele vastauksesi.

   (c) Laske X_n:n ja Y_n:n tehotiheysspektrit.

4. (a) Satunnaismuuttujien X_1 ja X_2 kovarianssimatriisin

$$\begin{pmatrix} 2.4 & -0.8 \\ -0.8 & 3.6 \end{pmatrix}$$

   ominaisvektorit ovat

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

   Määrää X_1:n ja X_2:n ortogonaalinen lineaarinen muunnos, jolla saadaan uudet korreloimattomat satunnaismuuttujat Y_1 ja Y_2. Mikä on uusien muuttujien kovarianssimatriisi?

   (b) Signaalia X_n estimoidaan kahden aiemman näytteen lineaarikombinaationa

$$X_n \approx Y_n = h_1 X_{n-1} + h_2 X_{n-2}.$$

   Määrää virheen $E[(X_n - Y_n)^2]$ minimoivat kertoimet h_1 ja h_2, kun signaalin X_n autokorrelaatiofunktiosta $R_X(m)$ tunnetaan $R_X(0) = 4$, $R_X(1) = 2$, $R_X(2) = 1$.

Table E. Properties of the Z-transform

Property	Time domain	z-domain (=ZD)	Region of convergence
Notation	$x(n)$	$X(z)$	$\mathrm{ROC}_x = \{z \mid r_2 < \lvert z\rvert < r_1\}$
	$y(n)$	$Y(z)$	ROC_y
1. Linearity	$ax(n)+by(n)$	$aX(z)+bY(z)$	At least the intersection $\mathrm{ROC}_x \cap \mathrm{ROC}_y$
2. Time shifting	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	That of $X(z)$, except $z=0$, if $k>0$ and $z=\infty$, if $k<0$
3. Scaling in ZD	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\lvert a\rvert r_2 < \lvert z\rvert < \lvert a\rvert r_1$
4. Time reversal	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \lvert z\rvert < \frac{1}{r_2}$
5. Differentiation in ZD	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \lvert z\rvert < r_1$
6. Convolution	$x(n)*y(n)$	$X(z)Y(z)$	At least $\mathrm{ROC}_x \cap \mathrm{ROC}_y$

Table F. Z-transform pairs

Signal $x(n)$	z-transform X(z)	ROC
1. $\delta(n)$	1	All z
2. $u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
4. $a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

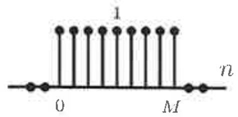
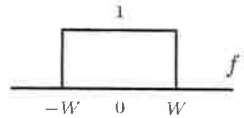
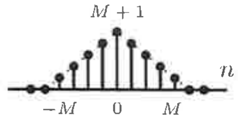
Table G. Functions

1. Rectangular function	$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \lvert t\rvert > \frac{1}{2} \end{cases}$
2. Triangular function	$\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} 1-\lvert t\rvert, & \lvert t\rvert < 1 \\ 0. & \lvert t\rvert > 1 \end{cases}$
3. Unit step function (cont.)	$u(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$
4. Unit step function (discr.)	$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$
5. Signum function	$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ -1, & t<0 \end{cases}$
6. Dirac delta function	$\delta(t) = 0,\ t \neq 0,\quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$
or equivalently	$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_0)dt = g(t_0)$
7. Discrete delta function	$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0. & n \neq 0 \end{cases}$
8. Sinc function	$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Table H. Definitions

1. $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$
2. $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \lvert x(t)\rvert^2 dt$
3. $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x(n)\rvert^2$
4. $P_x = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} \lvert x(n)\rvert^2$
5. $r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{x(n)}y(n+m)$
6. $x(n)*y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$
7. $x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau$
8. $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}\,dt$
9. $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft}\,df$
10. $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i2\pi kn/N}$
11. $x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{i2\pi kn/N}$
12. $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}$
13. $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{i\omega n}\,d\omega$
14. $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$
15. $x(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} X(z)z^{n-1}\,dz$
16. $Ae^{i\omega_0 n} \to AH(\omega_0)e^{i\omega_0 n}$

Table I. Fourier transform pairs

$g(n)$	$G(f),\quad -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}$
1. 	$\frac{\sin(\pi f(M+1))}{\sin(\pi f)}e^{-i\pi fM}$
2. $\frac{\sin(2\pi Wn)}{\pi n}$, $\lvert W\rvert < \frac{1}{2}$	
3. 	$\left(\frac{\sin(\pi f(M+1))}{\sin(\pi f)}\right)^2$
4. $a^n u(n)$, $\lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{1-ae^{-i2\pi f}}$
5. $a^{\lvert n\rvert}$, $\lvert a\rvert < 1$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(2\pi f)+a^2}$
6. $\delta(n)$	1
7. 1	$\delta(f)$
8. $\delta(n-M)$	$e^{-i2\pi fM}$
9. $e^{-i2\pi f_0 n}$, $\lvert f_0\rvert < \frac{1}{2}$	$\delta(f-f_0)$
10. $\cos(2\pi f_0 n)$, $\lvert f_0\rvert < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$
11. $\sin(2\pi f_0 n)$, $\lvert f_0\rvert < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2i}(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0))$
12. $u(n)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{1-e^{-i2\pi f}}$