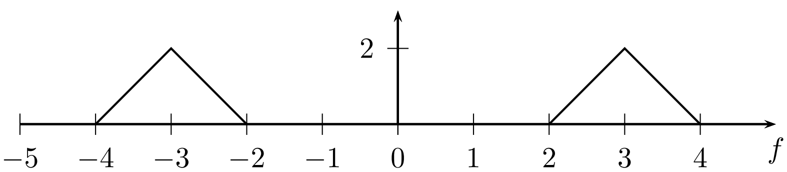
Signaalianalyysi 031080A

Päättökoe 19.12.2017

1. (a) Piirrä signaalin $x(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, kuvaaja. Tutki laskemalla, onko $x(t)$ energia- tai tehosignaali.

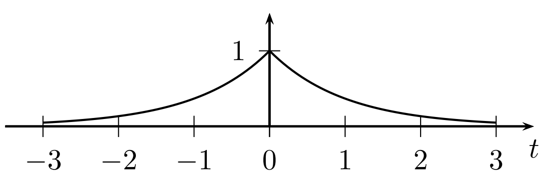
   (b) Laske signaalin $x(n) = \{\underset{\uparrow}{-1}, 2+i, i\}$ energia ja autokorrelaatiofunktio.

   (c) Analogisen signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos $X(f)$ on esitetty oheisessa kuvassa. Mikä on signaalin Nyquistin taajuus? Piirrä näytejonon $x(t)\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ amplitudispektri, kun $T = 0.2$. Tapahtuuko laskostumista?



RATKAISU:

(a)

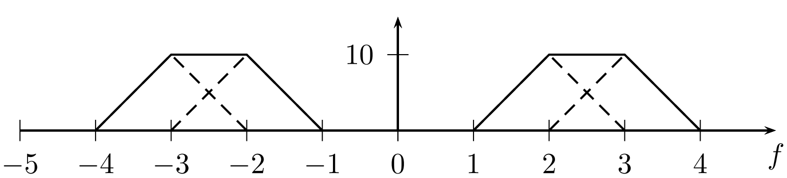


$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2\int_0^{\infty} e^{-2t} = \Big/_{0}^{\infty} -e^{-2t} = 1 < \infty \Rightarrow P_x = 0$. $x(n)$ on energiasignaali.

(b) $r_{xx}(n) = \overline{x(-n)} * x(n) = \{-i, 2-i, -1\} * \{-1, 2+i, i\} = \{i, -1-i, \underset{\uparrow}{7}, -1+i, -i\}$

$E_x = r_{xx}(0) = 7$.

(c) $f_N = 2f_{\max} = 8$. $\hat{X}(f) = 5\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f-k5)$



Laskostuminen tapahtuu.

2. (a) Olkoon $x(t)$ tehtävän 1.c) signaali. Piirrä esiverhokäyrän (=analyyttisen signaalin) $x_+(t)$ Fourier-muunnos $X_+(f)$ ja määrää $x_+(t)$. (2 p)

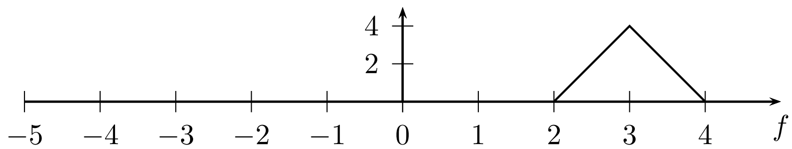
   (b) Analoginen LTI-systeemi on määritelty differentiaaliyhtälöllä

$$y'(t) + 4y(t) = 3x(t-5), \quad t \geq 0$$

   alkuehdolla $y(0) = 0$, $x(t) = 0$, $t \leq 0$, missä $x(t)$ on heräte ja $y(t)$ on vaste. Määrää tämän systeemin siirtofunktio ja impulssivaste. Mikä on systeemin vaste, kun heräte on $x(t) = u(t)$? (4 p)

RATKAISU:

(a)



$S_+(f) = 4\,\mathrm{tri}\,(f-3) \Rightarrow x_+(t) \overset{\text{A5,B7}}{=} 4\,\mathrm{sinc}^{\,2}(t)e^{i6\pi f}$

(b)

$$
\begin{aligned}
i2\pi f Y(f) + 4Y(f) &= 3X(f)e^{-i10\pi f} \\
\Rightarrow H(f) &= \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{3e^{i2\pi f\cdot 5}}{4+i2\pi f} \\
\Rightarrow h(t) &\overset{\text{A4,B3}}{=} 3e^{-4(t-5)}u(t-5).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= u(t) \\
\Rightarrow y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_5^t 3e^{-4(\tau-5)} = \Big/_{5}^{t} \frac{3}{-4}e^{-4(\tau-5)} = \frac{3}{4}(1-e^{-4(t-5)}), & t>5 \\ 0. & t<5 \end{cases} \\
&= \frac{3}{4}(1-e^{-4(t-5)})u(t-5).
\end{aligned}
$$

3. Olkoon $X(t) = \sin(4\pi t + \Theta)$, missä $\Theta \sim \mathrm{Tas}(0, 2\pi)$.

   (a) Laske $X(t)$:n odotusarvofunktio ja autokorrelaatiofunktio.

   (b) Olkoon $Y(t) = X(t) + W(t)$. Laske tarkasti perustellen autokorrelaatiofunktio $R_Y(t, t+\tau)$ ja tehotiheysspektri $S_Y(f)$, kun tiedetään, että $X(t)$ ja $W(t)$ ovat riippumattomia ja $W(t)$ on nollaodotusarvoista valkoista kohinaa, jonka tehotiheysspektri on $S_W(f) = 3$.

RATKAISU:

(a)

$$
\mu(t) = \int_0^{2\pi} \sin(4\pi t + \theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\Big/_{0}^{2\pi} -\cos(4\pi t+\theta) = \frac{1}{2\pi}[-\underbrace{\cos(4\pi t + 2\pi)}_{=\cos(4\pi t)} + \cos(4\pi t)] = 0
$$

$$
\begin{aligned}
R_X(t, t+\tau) &= E[\sin(4\pi t+\Theta)\sin(4\pi(t+\tau)+\Theta)] \overset{\text{D8}}{=} E[\frac{1}{2}\cos(4\pi\tau) - \frac{1}{2}\cos(4\pi(2t+\tau)+2\Theta)] \\
&= \frac{1}{2}\cos(4\pi\tau) - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(4\pi(2t+\tau)+2\theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\cos(4\pi\tau) - \frac{1}{8\pi}\Big/_{0}^{2\pi} \sin(4\pi(2t+\tau)+2\theta) \\
&= \frac{1}{2}\cos(4\pi\tau) - \frac{1}{8\pi}[\underbrace{\sin(4\pi(2t+\tau)+4\pi)}_{\sin(4\pi(2t+\tau))} - \sin(4\pi(2t+\tau))] \\
&= \frac{1}{2}\cos(4\pi\tau).
\end{aligned}
$$

(b)

$$\begin{aligned}
R_Y(t,t+\tau) &= E\{[X(t)+W(t)][X(t+\tau)+W(t+\tau)]\} \\
&= E[X(t)X(t+\tau)] + \underbrace{E[X(t)W(t+\tau)]}_{\overset{\text{riipp.}}{=}E[X(t)]E[W(t+\tau)]=0} + \underbrace{E[W(t)X(t+\tau)]}_{=0} + E[W(t)W(t+\tau)] \\
&= R_X(\tau) + R_W(\tau) \overset{\text{B8,J17}}{=} \frac{1}{2}\cos(4\pi\tau) + 3\delta(\tau) \\
S_Y(f) &\overset{\text{B12,J17}}{=} \frac{1}{4}[\delta(f-2)+\delta(f+2)] + 3
\end{aligned}$$

4. (a) Satunnaismuuttujien X_1 ja X_2 kovarianssimatriisin

$$\begin{pmatrix} 1.9 & -0.3 \\ -0.3 & 1.1 \end{pmatrix}$$

ominaisvektorit ovat

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Määrää X_1:n ja X_2:n ortogonaalinen lineaarinen muunnos, jolla saadaan uudet korreloimattomat satunnaismuuttujat Y_1 ja Y_2. Mikä on uusien muuttujien kovarianssimatriisi?

(b) Signaalia Z_n estimoidaan kahden edellisen näytteen lineaarikombinaationa (havainto=signaali)

$$Z_n \approx Y_n = h_1 Z_{n-1} + h_2 Z_{n-2}.$$

Määrää virheen $E[(Z_n - Y_n)^2]$ minimoivat kertoimet h_1 ja h_2, kun signaalin Z_n autokorrelaatiofunktiosta $R_Z(m)$ tunnetaan $R_Z(0) = 7,\ R_Z(1) = 5,\ R_Z(2) = 3$.

RATKAISU:

(a) Uudet muuttujat ovat

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},$$

ja niiden kovarianssimatriisi (J9)

$$C_Y = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.9 & -0.3 \\ -0.3 & 1.1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Sijoitetaan kaavaan J34 $X = Z$, $a = 1$, $b = 2$ ja $m = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} h_1 R_Z(0) + h_2 R_Z(-1) = R_Z(1) \\ h_1 R_Z(1) + h_2 R_Z(0) = R_Z(2) \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 7h_1 + 5h_2 = 5 \\ 5h_1 + 7h_2 = 3 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} h_1 = \frac{5}{6} \\ h_2 = -\frac{1}{6}. \end{cases}
\end{aligned}$$