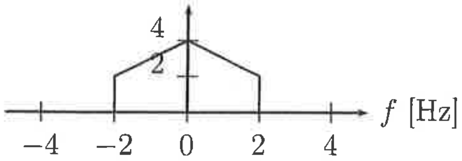
Signaalianalyysi 031080A

Loppukoe 17.4.2018

1. (a) Tutki laskemalla, ovatko signaalit $x(n) = e^{i\frac{\pi}{3}n}$ ja $y(t) = e^{-t}u(t)$ energia- tai tehosignaaleja. Laske signaalien $y(t)$ ja $z(t) = e^{-2t}u(t)$ konvoluution $(y * z)(t)$ arvo hetkellä $t = 1$.

   (b) Analogisen signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos on esitetty oheisessa kuvassa.



   Kuinka pieni pitää näytteenottovälin T olla, jotta $x(t)$ voidaan yksikäsitteisesti määrätä näytteistä $x(nT)$, $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$? Olkoon näytteenottotaajuus $f_s = 5$ Hz. Piirrä impulssijonon $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$ Fourier-muunnos. Tapahtuuko laskostumista?

2. (a) Laske diskreetin signaalin $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, 3, 2\}$ 4 pisteen diskreetti Fourier-muunnos $X(k)$ ja piirrä amplitudispektrin $|X(k)|$:n kuvaaja.

   (b) Analoginen LTI-systeemi on määritelty differentiaaliyhtälöllä

$$y'(t) + 7y(t) = 2x(t-3), t \geq 0$$

   alkuehdolla $y(0) = 0$, $x(t) = 0$, $t \leq 0$, missä $x(t)$ on heräte ja $y(t)$ on vaste. Määrää tämän systeemin siirtofunktio ja impulssivaste. Onko systeemi kausaalinen?

3. Olkoon X_n aikadiskreetti nollakeskiarvoinen satunnaissignaali, jolle $E[X_n^2] = 1$ kaikilla n:n arvoilla. Lisäksi tiedetään, että X_n ja X_m ovat riippumattomat aina kun $n \neq m$.

   (a) Laske autokorrelaatiofunktio $R_X(n, n+k)$, kun $k = 0$ ja kun $k \neq 0$. Tutki, onko signaali stationaarinen.

   (b) Olkoon $Y_n = X_n + X_{n-1}$ (tai vaihtoehtoisesti $Y_n = X_n * \{\underset{\uparrow}{1}, 1\}$). Laske Y_n:n odotusarvofunktio ja autokorrelaatiofunktio. Onko Y_n stationaarinen? Perustele vastauksesi.

   (c) Laske X_n:n ja Y_n:n tehotiheysspektrit.

4. (a) Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo $E(X)$, varianssi $D^2(X)$ ja odotusarvo $E[\cos(\frac{\pi}{2}X)]$, kun jakauman (piste)todennäköisyysfunktio on annettu oheisessa taulukossa

x_k	1	2	4	8
$P(X = x_k)$	0.2	0.3	0.4	0.1

   (b) Signaalia X_n estimoidaan kahden aiemman näytteen lineaarikombinaationa

$$X_n \approx Y_n = h_1 X_{n-1} + h_2 X_{n-2}.$$

   Määrää virheen $E[(X_n - Y_n)^2]$ minimoivat kertoimet h_1 ja h_2, kun signaalin X_n autokorrelaatiofunktiosta $R_X(m)$ tunnetaan $R_X(0) = 4$, $R_X(1) = 2$, $R_X(2) = 1$.