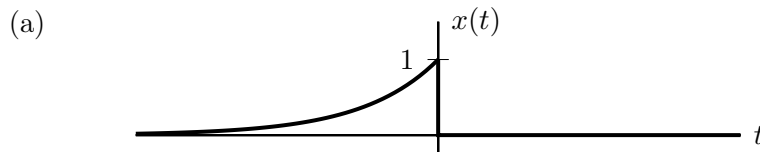


# Signaalianalyysi 031080A

Kurssikoe 20.12.2016

1. (a) Piirrä signaalin  $x(t) = e^t u(-t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , kuvaaja. Tutki laskemalla, onko  $x(t)$  energia- tai tehosignaali.
- (b) Laske signaalien  $x(n) = \{1, 3, 5\}$  ja  $y(n) = \{2, 4, 6\}$  konvoluutio ja signaalin  $x(n)$  autokorrelaatiofunktio. Merkitse myös nollaindeksin paikat.
- (c) Analogisesta signaalista  $x(t) = 3 \sin(120\pi t + \frac{\pi}{3}) + \cos(400\pi t + \frac{\pi}{6})$  otetaan tasavälisesti näytteitä. Määrä suuri näytteenottoväli  $T$ , jolla alkuperäinen signaali voidaan yksikäsitteisesti määrätä näytteistä  $x(nT)$ . Määrä saatu diskreetti signaali  $x(n)$  ja sen digitaaliset taajuudet (kulmataajuudet  $\omega \in [0, \pi]$ ), kun  $x(t)$ :stä on otettu 200 näytettä 0.005 sekunnin välein.

RATKAISU:



$E_x = \frac{1}{2} < \infty$ , joten kyseessä energiasignaali.

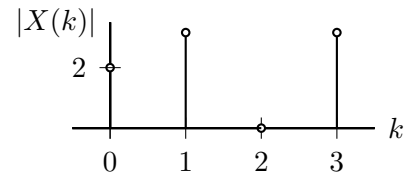
- (b)  $x(n) * y(n) = \{2, 10, 28, 38, 30\}$ ,  $r_x(m) = \{5, 18, 35, 18, 5\}$ .
  - (c)  $T \leq \frac{1}{2 \cdot 200} = 0.0025$  s.  
 $x(n) = 3 \sin(\frac{3}{5}\pi n + \frac{\pi}{3}) + \cos(0 \cdot n + \frac{\pi}{6})$ .  
 Digitaaliset taajuudet ovat  $\frac{3}{5}\pi$  ja 0.
2. (a) Analogisesta signaalista  $x(t)$  on saatu näytteistämällä näytejono  $x(n) = \{1, -1, -2, 0\}$  näytteenottotaajuudella  $f_s = 200$  Hz (laskostumista ei ole tapahtunut). Laske näytejonolle 4 pisteen diskreetti Fourier-muunnos ja piirrä amplitudispektri. Mikä on amplitudiltaan suurinta taajuuskomponenttia vastaava analoginen taajuus?
  - (b) Analoginen LTI-systeemi on määritelty differentiaaliyhtälöllä

$$y'(t) + 9y(t) = 6x(t - 3), \quad t \geq 0$$

alkuehdolla  $y(0) = 0$ ,  $x(t) = 0$ ,  $t \leq 0$ , missä  $x(t)$  on heräte ja  $y(t)$  on vaste. Määrä tämän systeemin siirtofunktio ja impulssivaste.

RATKAISU:

(a)  $X(k) \stackrel{\boxed{\text{H10}}}{=} \stackrel{N=4}{=} \{ -2, 3+i, 0, 3-i \}$ ,  $|X(k)| = \{ 2, \sqrt{10}, 0, \sqrt{10} \}$ .



Amplitudiltaan suurin taajuuskomponentti on  $|X(1)| = \sqrt{10}$ , jota vastaa analoginen taajuus 50 Hz. ( $|X(3)|$  liittyy samaan taajuuteen.)

(b)  $H(f) = \frac{6}{9+i2\pi f} e^{-3i2\pi f}$ ,  $h(t) = 6e^{-9(t-3)} u(t-3)$ .

3. Olkoon signaali  $X(t) = A \cos(2\pi t + \Theta)$ , missä  $A$  ja  $\Theta$  ovat riippumattomia satunnaismuuttujia. Amplitudin  $A$  jakauma on annettu oheisessa taulukossa ja vaihe  $\Theta$  noudattaa tasajakaumaa  $\text{Tas}(0, 2\pi)$ .

$a$	1	2	3	4
$P(A = a)$	0.4	0.2	0.3	0.1

- (a) Määrää odotusarvot  $E(A)$  ja  $E(A^2)$ . (2 p)
- (b) Määrää signaalin  $X(t)$  odotusarvofunktio  $E[X(t)]$  ja autokorrelaatiofunktio  $R_X(t, t + \tau)$ . (3 p)
- (c) Määrää on signaalin  $X(t)$  keskimääräinen teho. (1 p)

RATKAISU:

- (a)  $E(A) = 2.1$ ,  $E(A^2) = 5.5$ .
- (b)  $E[X(t)] = 0$ .  
 $R_X(t, t + \tau) = 2.75 \cos(2\pi\tau)$ .
- (c)  $P_X = 2.75$ .

4. (a) Selitä mitä tarkoittaa
- kaistarajoitettu valkoinen kohina
  - (heikosti) stationaarinen signaali.
- (b) Signaalia  $Z_n$  estimoidaan kahden edellisen näytteen lineaarikombinaationa (havainto=signaali)

$$Z_n \approx Y_n = h_1 Z_{n-1} + h_2 Z_{n-2}.$$

Määrää virheen  $E[(Z_n - Y_n)^2]$  minimoivat kertoimet  $h_1$  ja  $h_2$ , kun signaalin  $Z_n$  autokorrelaatiofunktio  $R_Z(m)$  tunnetaan  $R_Z(0) = 8$ ,  $R_Z(1) = 4$ ,  $R_Z(2) = 1$ .

- (c) Signaalista  $Z(t)$  vastaanotetaan kohinainen havainto  $X(t) = Z(t) + N(t)$ , missä  $N(t)$  on signaalista riippumaton nollakeskiarvoista valkoista kohinaa, jonka tehotehiys on 1. Signaalin  $Z(t)$  tehotehiysspektrin tiedetään olevan

$$S_Z(f) = \frac{16}{9 + 4\pi^2 f^2}.$$

Määrää kausaalisen Wiener-suodattimen valkaisuodatin havainnon  $X(t)$  valkaisuomiseksi. Anna vastauksena suodattimen siirtofunktio. (Estimointisuodatinta ei tarvitse laskea.)

RATKAISU:

- (a) • Tehotehiys on vakio taajuuskaistalla  $-W \leq f \leq W$  eli  $S_X(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & |f| \leq W, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$
- $\mu(t) = E[X(t)] \equiv \mu$ ,  $R_X(t, t + \tau) = R_X(\tau) \forall t$ .
- (b)  $\begin{cases} h_1 & = \frac{7}{12} \\ h_2 & = -\frac{1}{6}. \end{cases}$
- (c) Ei kuulu koealueeseen 2017.