Signaalianalyysi, 2.vk 8.2.2014, lyhennetyt ratkaisut

1. (a) $U_k = \frac{1}{11} Z_k$, missä $Z_k = (7Z_{k-1}) \bmod 11 \;\Rightarrow\; U_k = \frac{1}{11}\{1, 7, 5, 2, 3, 10, 4, 6, 9, 8, 1, ...\}$.

   (b) i. Puuttuvat todennäköisyydet saadaan Y:n reunajakauman $P(Y = y_i)$ avulla

$$\begin{aligned} P(X = -1 \cap Y = 2) &= P(Y = 2) - P(X = 0 \cap Y = 2) - P(X = 1 \cap Y = 2) \\ &= 1/5 - 2/25 - 2/25 \\ &= 1/25 \\ P(X = 0 \cap Y = 4) &= P(Y = 4) - P(X = -1 \cap Y = 4) - P(X = 1 \cap Y = 4) \\ &= 2/5 - 5/25 - 1/25 \\ &= 4/25. \end{aligned}$$

Y:n reunajakaumalla pätee $\sum_i P(Y = y_i) = 1$ joten on oltava

$$P(Y = 6) = 1 - P(Y = 2) - P(Y = 4) = 1 - 1/5 - 2/5 = 2/5.$$

Tästä edelleen seuraa, että

$$\begin{aligned} P(X = 1 \cap Y = 6) &= P(Y = 6) - P(X = -1 \cap Y = 6) - P(X = 0 \cap Y = 6) \\ &= 2/5 - 4/25 - 4/25 \\ &= 2/25. \end{aligned}$$

(Luku $P(X = 1 \cap Y = 6)$ olisi saatu myös siitä tiedosta, että kaikkien taulukon todennäköisyyksien summan on oltava 1.)

Valmis taulukko:

X \ Y	2	4	6
-1	1/25	5/25	4/25
0	2/25	4/25	4/25
1	2/25	1/25	2/25
$P(Y = y_i)$	1/5	2/5	2/5

ii. Ehdollinen todennäköisyys

$$P(X = 1|Y = 2) = \frac{P(X = 1 \cap Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{2/25}{1/5} = 2/5.$$

iii. X ja Y eivät ole tilastollisesti riippumattomat ($P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j),\ \forall i, j$), koska esimerkiksi

$$P(X = -1 \cap Y = 2) = 1/25 \neq P(X = -1)P(Y = 2) = 1/5 \cdot 2/5.$$

2. Ominaisarvot λ yhtälöstä $\det(C_{(X,Y)} - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2.1 - \lambda & -0.8 \\ -0.8 & 0.9 - \lambda \end{vmatrix} = (2.1 - \lambda)(0.9 - \lambda) - 0.64 = \lambda^2 - 3\lambda + \frac{5}{4} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ominaisvektorit

$$\underline{\lambda = \frac{5}{2}:} \qquad \begin{pmatrix} -0.4 & -0.8 \\ -0.8 & -1.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; a = -2b, \quad \text{valitaan} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

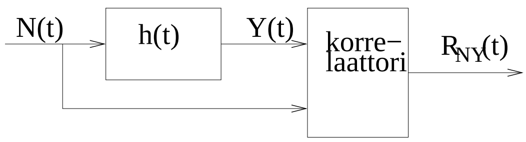
$$\underline{\lambda = \frac{1}{2}:} \qquad \begin{pmatrix} 1.6 & -0.8 \\ -0.8 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; b = 2a, \quad \text{valitaan} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Uudet muuttujat $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2X - Y \\ X + 2Y \end{pmatrix}$.

Uusien muuttujien kovarianssimatriisi $C_{(U,V)} = AC_{(X,Y)}A^T = \begin{pmatrix} 12.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix}$.

3. $E[X(t)] = E[W(t) + 2\cos(\omega t + \Theta)] = E[W(t)] + \int_0^{2\pi} 2\cos(\omega t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = 0.$
$R_X(t, t+\tau) = E[(W(t) + 2\cos(\omega t + \Theta))(W(t+\tau) + 2\cos(\omega t + \omega\tau + \Theta))]$
$= E[W(t)W(t+\tau) + 2W(t+\tau)\cos(\omega t+\Theta) + 2W(t)\cos(\omega t+\omega\tau+\Theta) + 4\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega t+\omega\tau + \Theta)]$
$= R_W(\tau) + 2E[W(t+\tau)]E[\cos(\omega t + \Theta)] + 2E[W(t)]E[\cos(\omega t + \omega\tau + \Theta)] + E[2\cos(\omega\tau) + \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\Theta)]$
$= R_W(\tau) + 2\cos(\omega\tau) + 2\int_0^{2\pi}\cos(2\omega t + \omega\tau + 2\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$
$= R_W(\tau) + 2\cos(\omega\tau)$
$= \mathcal{F}^{-1}[S_W(f)] + 2\cos(\omega\tau)$
$= \delta(\tau) + 2\cos(\omega\tau).$
$X(t)$ on stationaarinen, koska sekä $E[X(t)]$ että $R_X(t, t+\tau)$ ovat ajasta t riippumattomia.

4. (a) (i) ei voi olla tehotiheysspektri, koska se ei ole parillinen.
(iii) ei voi olla tehotiheysspektri, koska se saa negatiivisia arvoja.
   (b) Kaava J23, kun heräte on valk. kohinaa varianssina σ_N^2: $R_{NY}(\tau) = \sigma_N^2\delta(\tau) * h(\tau)$
$\Rightarrow h(\tau) = \frac{1}{\sigma_N^2}R_{NY}(\tau)$, missä $R_{NY}(\tau)$ on herätteen ja vasteen välille mitattu ristikorrelaatio.



   (c) Ristitehotiheysspektri (kaava J24) $S_{XY}(f) = H(f)S_X(f)$.
Koherenssifunktio $\rho_{XY}^2(f) = \frac{|S_{XY}(f)|^2}{S_X(f)S_Y(f)} = \frac{|H(f)S_X(f)|^2}{S_X(f)|H(f)|^2 S_X(f)} = 1.$

5. $X(t)$:n tehotiheys on $Z(t)$:n ja $N(t)$:n tehotiheyksien summa, koska ne ovat riippumattomia ja vähintään toinen niistä on nollakeskiarvoinen. Sijoitetaan $S_Z(f)$ ja $S_N(f)$ kaavaan J35 ja spektraalifaktoroidaan

$$S_X(f) = S_Z(f) + S_N(f) = \frac{9}{16 + 4\pi^2 f^2} + 1 = \frac{25 + 4\pi^2 f^2}{16 + 4\pi^2 f^2} = \frac{5 + j2\pi f}{4 + j2\pi f}\frac{5 - j2\pi f}{4 - j2\pi f} = G(f)\overline{G}(f).$$

Valkaisusuodattimen siirtofunktio saadaan kaavasta J35

$$W(f) = \frac{1}{G(f)} = \frac{4 + j2\pi f}{5 + j2\pi f}.$$

Estimointisuodattimen siirtofunktio $H_2(f)$ on kausaalinen osa kaavan J37 ristitehotiheydestä $S_{X'Z}(f) = \frac{S_{XZ}(f)}{\overline{G}(f)}$. Koska $Z(t)$ ja $N(t)$ ovat riippumattomia ja vähintään toinen niistä on nollakeskiarvoinen, on $S_{XZ}(f) = S_Z(f)$, joten

$$S_{X'Z}(f) = \frac{S_Z(f)}{\overline{G}(f)} = \frac{9/(16 + 4\pi^2 f^2)}{(5 - j2\pi f)/(4 - j2\pi f)} = \frac{9}{(4 + j2\pi f)(5 - j2\pi f)} = \frac{1}{4 + j2\pi f} + \frac{1}{5 - j2\pi f}.$$

(viimeinen lauseke on saatu osamurtokehitelmällä)
Estimointisuodattimen siirtofunktio $H_2(f)$ on kausaalinen osa edellisestä

$$H_2(f) = \frac{1}{4 + j2\pi f}.$$

Optimaalisen suodattimen siirtofunktio saadaan kaavasta J38

$$H(f) = W(f)H_2(f) = \frac{4 + j2\pi f}{5 + j2\pi f}\frac{1}{4 + j2\pi f} = \frac{1}{5 + j2\pi f}.$$

Optimaalisen suodattimen impulssivaste

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)] = e^{-5t}u(t).$$