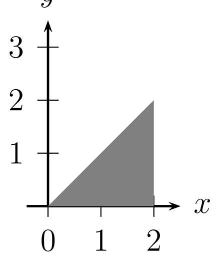
Signaalianalyysi, 2.vk 9.2.2013, lyhennetyt ratkaisut

1. (a) $E(X) = \sum_{x_k} x_k P(X = x_k) = 1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.3 + 7 \cdot 0.4 = 5.0,$
$E(X^2) = \sum_{x_k} x_k^2 P(X = x_k) = 1^2 \cdot 0.1 + 3^2 \cdot 0.2 + 5^2 \cdot 0.3 + 7^2 \cdot 0.4 = 29.0,$
$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 29 - 5^2 = 4.0.$

   (b) Vakio c saadaan vaatimalla, että tiheysfunktion integraali yli xy-tason on yksi
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3\int_0^2 c\,dx\,dy = \int_0^3 \Big/_0^2 cx\,dy = \int_0^3 2c\,dy = \Big/_0^3 cy = 6c$, eli $c = \frac{1}{6}$.
Todennäköisyys
$P(X > Y) = \int_0^2\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^2 \Big/_0^x \frac{1}{6}y\,dx = \frac{1}{6}\int_0^2 x\,dx = \frac{1}{6}\Big/_0^2 \frac{x^2}{2} = \frac{1}{3}.$
Kuvassa on varjostettu alue, jossa $f(x,y) > 0$ ja $X > Y$.



2. $\mu_Y(t) = E[Y(t)] = E[A]E[\cos(\omega t + \Theta)] = E[A]\int_0^{2\pi}\cos(\omega t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = 0.$
$E(A^2) = \sum a_k^2 P(A = a_k) = (-1)^2 P(A = -1) + 1^2 P(A = 1) = 1.$
$R_Y(t, t+\tau) = E[A\cos(\omega t+\Theta) A\cos(\omega t+\omega\tau+\Theta)] = \frac{1}{2}E(A^2)E[\cos(2\omega t+\omega\tau+2\Theta)+\cos(\omega\tau)]$
$= \frac{1}{2}[\cos(\omega\tau) + \int_0^{2\pi}\cos(2\omega t + \omega\tau + 2\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta] = \frac{1}{2}\cos(\omega\tau) + \frac{1}{8\pi}\Big/_0^{2\pi}\sin(2\omega t + \omega\tau + 2\theta)$
$= \frac{1}{2}\cos(\omega\tau).$
$Y(t)$ on stationaarinen, koska sekä $\mu_Y(t)$ että $R_Y(t, t+\tau)$ ovat ajasta t riippumattomia.
Keskimääräinen teho $P_Y = R_Y(0) = \frac{1}{2}$.

3. (a) Keskiarvon suhteen ergodisuus stationaariselle aikajatkuvalle $X(t)$:lle
   - Välttämätön ehto: $\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} C(\tau)(1 - \frac{|\tau|}{2T})d\tau \to 0$, kun $T \to \infty$.
   - Riittävä ehto: $R(0) < \infty$ ja $R(\tau) - \mu^2 \to 0$, kun $\tau \to \infty$.

   (b) Aikadiskreetillä nollaodotusarvoisella satunnaissignaalilla keskiarvon arvon suhteen ergodisuus seuraa ehdosta $\sum_{m=-\infty}^{\infty}|R_X(m)| = 0.5 + 1 + 0.5 = 2 < \infty$.

4. (a) Vain kuvassa A voisi olla tehotiheysspektri (oltava parillinen ja ei-negatiivinen).

   (b) Vasteen tehotiheysspektri $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = H(f)\overline{H}(f)S_X(f)$
$\Rightarrow\ H(f)\overline{H}(f) = \frac{4}{4+4\pi^2 f^2} = \underbrace{\frac{2}{(2+j2\pi f)}}_{\text{kaus.}} \cdot \underbrace{\frac{2}{(2-j2\pi f)}}_{\text{ei-kaus.}}.$
Kaus. systeemin siirtofunktio $H(f) = \frac{2}{2+j2\pi f}$.
Impulssivaste $h(t) = \mathcal{F}^{-1}(\frac{2}{2+j2\pi f}) = 2e^{-2t}u(t)$.

5. (a) $S_Z(f) = \mathcal{F}[R_Z(\tau)] = \frac{12}{4+4\pi^2 f^2}$ ja $S_N(f) = 1$. Ei-kaus. Wiener-suod. siirtofuntio:
$H(f) = \frac{S_Z(f)}{S_Z(f)+S_N(f)} = \frac{12/(4+4\pi^2 f^2)}{12/(4+4\pi^2 f^2)+1} = \frac{12}{16+4\pi^2 f^2}.$
Impulssivaste $h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)] = \mathcal{F}^{-1}[\frac{3}{2}\cdot\frac{2\cdot 4}{4^2+(2\pi f)^2}] = \frac{3}{2}e^{-4|t|}$.

   (b) Ei kohinaa $\Rightarrow$ $Z_n = X_n$ ja $R_{XZ}(m) = E[X_n Z_{n+m}] = E[X_n X_{n+m}] = R_X(m)$. Kaava J31: $R_X(m) = \sum_{k=1}^{2} h_k R_X(m-k),\ m = 1, 2 \Rightarrow \begin{cases} R_X(1) = h_1 R_X(0) + h_2 R_X(-1) \\ R_X(2) = h_1 R_X(1) + h_2 R_X(0) \end{cases}.$
Sijoitetaan $R_X \Rightarrow \begin{cases} 3h_1 + 2h_2 = 2 \\ 2h_1 + 3h_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = \frac{4}{5} \\ h_2 = -\frac{1}{5} \end{cases}.$