TEKNILLINEN TIEDEKUNTA, MATEMATIIKAN JAOS

Signaalianalyysi 031024A

2. välikoe 9.2.2013

1. (a) Laske $E(X)$, $E(X^2)$ ja $\mathrm{Var}(X)$, kun jakauman (piste)todennäköisyysfunktio on annettu oheisessa taulukossa

x_k	1	3	5	7
$P(X = x_k)$	0.1	0.2	0.3	0.4

(b) Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio on

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & \text{kun } 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määrää vakio c ja todennäköisyys $P(X > Y)$.

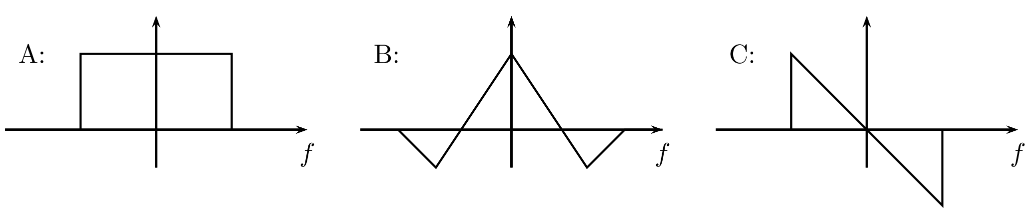
2. Olkoon $Y(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$, missä ω on vakio ja $P(A = 1) = P(A = -1) = \frac{1}{2}$. Olkoon edelleen vaihe Θ riippumaton A:sta ja $\Theta \sim \mathrm{Tas}(0, 2\pi)$. Laske signaalin $Y(t)$ odotusarvofunktio $\mu_Y(t)$ ja autokorrelaatiofunktio $R_Y(t, t+\tau)$. Tutki onko $Y(t)$ stationaarinen ja määrää sen keskimääräinen teho.

3. (a) Selitä, mitä tarkoittaa signaalin ergodisuus keskiarvon suhteen. Anna välttämätön ja riittävä ehto aikajatkuvan stationaarisen signaalin $X(t)$ ergodisuudelle keskiarvon suhteen.

(b) Tutki onko aikadiskreetti signaali X_n ergodinen keskiarvon suhteen, kun sen odotusarvofunktio on $E(X_n) = 0$ ja autokorrelaatiofunktio

$$R_X(m) = \begin{cases} 1, & \text{kun } m = 0 \\ 0.5, & \text{kun } m = \pm 1 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

4. (a) Mikä/mitkä seuraavista kuvaajista voisi esittää jonkin signaalin tehotiheysspektriä? Perustele vastauksesi.



(b) Kausaalisen LTI-systeemin herätteenä on valkoista kohinaa $X(t)$, jonka tehotiheysspektri on $S_X(f) = 1$. Vasteen $Y(t)$ tehotiheysspektri on tällöin

$$S_Y(f) = \frac{4}{4 + 4\pi^2 f^2}.$$

Määrää systeemin siirtofunktio $H(f)$ ja impulssivaste $h(t)$.

5. (a) Olkoon $X(t) = Z(t) + N(t)$, missä $Z(t)$ on stokastinen telesignaali, $R_Z(\tau) = 3e^{-2|\tau|}$, ja $N(t)$ on $Z(t)$:stä riippumatonta nollakeskiarvoista valkoista kohinaa, jonka tehotiheys on 1. Määrää **ei-kausaalisen** Wiener-suodattimen impulssivastefunktio $h(t)$, kun estimoitavana on $Z(t)$ havaintojen $X(t)$ perusteella.

(b) Signaalia X_n estimoidaan aiempien näytteiden lineaarikombinaationa

$$X_n \approx Y_n = \sum_{k=1}^{2} h_k X_{n-k}$$

Määrää virheen $E[(X_n - Y_n)^2]$ minimoivat kertoimet h_1 ja h_2, kun signaalin X_n autokorrelaatiofunktiosta $R_X(m)$ tunnetaan $R_X(0) = 3,\ R_X(1) = 2,\ R_X(2) = 1$.