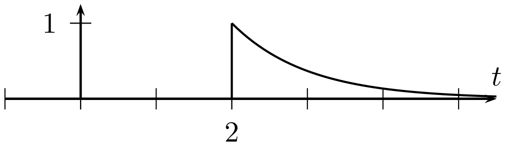
Signaalianalyysi 031080A

Loppukoe 16.12.2020

1. Olkoon signaali $x(t) = e^{-t+2}u(t-2)$. Hahmottele signaalin kuvaaja. Määrää signaalin energia ja keskimääräinen teho.

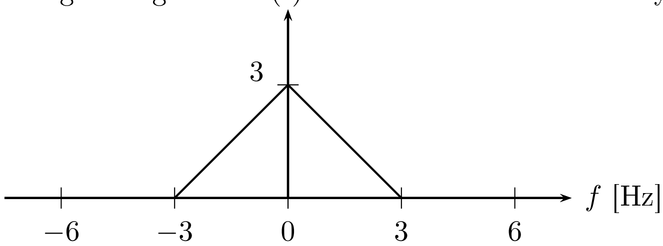
   Ratkaisu



$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t+2}u(t-2)|^2\,dt = \int_2^{\infty} e^{-2t+4}\,dt = \Big/_{2}^{\infty} -\frac{1}{2}e^{-2t+4} = 0 - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$P_x = 0.$

2. Analogisen signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos on esitetty oheisessa kuvassa.



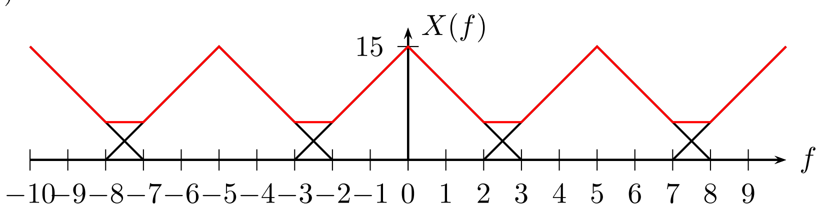
   (a) Määrää signaalin Nyquistin taajuus. Kuinka suuri saa näytteenottoväli T olla, jotta $x(t)$ voidaan yksikäsitteisesti määrätä näytteistä $x(nT)$, $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$? (2p)

   (b) Olkoon seuraavaksi näytteenottotaajuus $f_s = 5$ Hz. Piirrä impulssijonon $\hat{x}(t) = x(t)\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ Fourier-muunnos. Tapahtuuko laskostumista? Perustele vastauksesi. (4 p)

   Ratkaisu

   (a) $f_N = 2f_c = 2 \cdot 3$ Hz $= 6$ Hz, $T \leq \frac{1}{6}$ s.

   (b)



   Kopiot menevät päällekkäin, joten laskostumista tapahtuu.

3. Lineaarista aikainvarianttia järjestelmää ($x[n]$ on heräte ja $y[n]$ on vaste) kuvaa differenssiyhtälö

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{3}}y[n-1] + x[n].$$

   (a) Laske järjestelmän siirtofunktio $H(z)$ ja taajuusvastefunktio $H(\omega)$.

   (b) Määrää vaste herätteeseen $x[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n)$.

Ratkaisu

(a) $\mathcal{Z}$-muuntamalla.

$$Y(z) = \frac{1}{\sqrt{3}} Y(z) z^{-1} + X(z) \quad \Leftrightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\omega}}$$

(b) Ainoa kulmataajuus on $\omega = \frac{\pi}{2}$. Kyseisellä taajuudella taajuusvaste on

$$H(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} i}$$

Amplitudivaste

$$|H(\frac{\pi}{2})| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vaihevaste

$$\arg H(\frac{\pi}{2}) = \arg 1 - \arg(1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = -(\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$$

Kysytty vaste on $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{6})$.

4. Riippumattomat satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat molemmat eksponenttijakaumaa Exp(2) (ks. kaavakokoelma).

(a) Määrää muuttujien X ja Y kovarianssimatriisi. (2 p)

(b) Määrää muuttujien X ja Y yhteisjakauman tiheysfunktio $f(x, y)$. (2 p)

(c) Muodostetaan uudet muuttujat $U = X + Y$ ja $V = -X + Y$. Määrää muuttujien U ja V kovarianssimatriisi. (2 p)

Ratkaisu X ja Y ovat riippumattomat, joten $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ ja $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

(a) $C_{X,Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}\, X & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Var}\, Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(b) $f(x, y) = 2e^{-2x}\mathrm{u}(x) \cdot 2e^{-2y}\mathrm{u}(y) = 4e^{-2x-2y}\mathrm{u}(x)\mathrm{u}(y)$. ($\mathrm{u}(x)$ on tässä yksikköaskelfunktio.)

(c) Muunnos matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

Kovarianssimatriisi

$$C_{U,V} = A C_{X,Y} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. Olkoon A ja Θ riippumattomia satunnaismuuttujia. A:n jakauman (piste)todennäköisyysfunktio on annettu oheisessa taulukossa ja Θ noudattaa tasajakaumaa $\mathrm{Tas}(0, 2\pi)$

a_k	-2	-1	1	2
$P(A = a_k)$	0.3	0.15	0.35	0.2

(a) Laske A:n odotusarvot $E(A)$ ja $E(A^2)$.

(b) Laske signaalin $X(t) = A\cos(2\pi t + \Theta)$ odotusarvofunktio $\mu_X(t)$ ja autokorrelaatiofunktio $R_X(t, t+\tau)$.

Ratkaisu

(a)

$$\begin{aligned} E(A) &= -2 \cdot 0.3 - 1 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.35 + 2 \cdot 0.2 = 0 \\ E(A^2) &= 4 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.35 + 4 \cdot 0.2 = 2.5 \end{aligned}$$

(b) $\mu_X(t) = E(A)E(\cos(2\pi t + \Theta)) = 0$

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= E[A\cos(2\pi t + \Theta) \cdot A\cos(2\pi(t+\tau) + \Theta)] \\ &= E[A^2]E[\cos(2\pi t + \Theta)\cos(2\pi t + 2\pi\tau + \Theta)] \\ &= 2.5E[\frac{1}{2}\cos(2\pi\tau) + \frac{1}{2}\cos(4\pi t + 2\pi\tau + 2\Theta)] \\ &= 1.25\cos(2\pi\tau) + 1.25\int_0^{2\pi} \cos(4\pi t + 2\pi\tau + 2\theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta \\ &= 1.25\cos(2\pi\tau) + 1.25 \underbrace{\Big/_{0}^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(4\pi t + 2\pi\tau + 2\theta)\frac{1}{2\pi}}_{=0,\ \sin()\ 2\pi\text{-jaks.}} \\ &= 1.25\cos(2\pi\tau). \end{aligned}$$

6. Valkoista kohinaa tehotiheydellä 2 syötetään herätteenä tuntemattomaan kausaaliseen LTI-järjestelmään. Vasteen tehotiheydeksi mitataan tällöin

$$S_Y(f) = \frac{32}{9 + 4\pi^2 f^2}.$$

Määrää järjestelmän siirtofunktio $H(f)$ ja impulssivaste $h(t)$.

Ratkaisu Vasteen tehotiheyden kaavalla

$$\begin{aligned} \frac{32}{9 + 4\pi^2 f^2} &= S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = H(f)\overline{H(f)} \cdot 2 \\ \Rightarrow H(f)\overline{H(f)} &= \frac{16}{9 + 4\pi^2 f^2} = \frac{4}{3 + i2\pi f}\frac{4}{3 - i2\pi f} \end{aligned}$$

Valitaan siirtofunktioksi $H(f) = \frac{4}{3+i2\pi f}$, jolloin $h(t) = 4e^{-3t}u(t)$ ja järjestelmä on kausaalinen.